УДК 621

Ю.В. Куц, д.т.н., проф., Н.Б. Марченко, к.т.н., Л.М. Щербак, д.т.н., проф.
(Національний авіаційний університет, Україна)

АЛГОРИТМ ВІКОННОЇ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СПЕКТРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИГНАЛІВ

Розглядається проблема обчислення спектру сигналу при спостереженні на обмеженому часовому відрізку з використанням . дискретного перетворення Фурье. Показано, що обмеження часу аналізу рівносильно використанню прямокутної віконної функції, частотна характеристика якої має максимальні бічні пелюстки.

Вступ

В основі цифрового спектрального аналізу лежить апарат дискретного перетворення Фурье (ДПФ) [2]. При цьому ДПФ має високоефективне швидке перетворення Фурье (ШПФ). Проте при використанні ДПФ часто виникають труднощі обумовлені скінченністю інтервалу обробки [1], в той час як цифровий сигнал може бути нескінченний по часу. В цьому розділі розглянемо випадки, що виникають при обмеженні інтервалу аналізу.

Нехай цифровий сигнал $s_0(t)$нескінченний по часу. В найпростішому випадку можна задати цей сигнал як гармонійне коливання з частотою ω_0. Перетворенням Фурье цього сигналу буде дельта-імпульс на частоті сигналу, тобто $S_0(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$ (рис.1).

На практиці неможливо провести розрахунок спектру шляхом чисельного інтегрування по всій часовій вісі. За виключенням випадку коли можна отримати аналітичний вираз для спектру сигналу. Зафіксуємо інтервал часу T на якому розраховуватимемо спектр сигналу. Таким чином отримаємо цифровий сигнал $s(t)$, який співпадає з початковим на інтервалі часу T, але поза зоною інтервалу спостереження вважаємо, що $s(t)=0$. Цифровий сигнал $s(t)$ можна представити як добуток вихідного нескінченного сигналу $s_0(t)$ і прямокутного імпульсу $w(t)$ тривалістю T, $s(t)=s_0(t)\cdot w(t)$.

Спектр сигналу $s(t)$, згідно властивостям перетворення Фурье буде рівний згортці спектрів вихідного сигналу і спектру $W(\omega)$ прямокутного імпульсу $w(t)$ [4]:

$$S(\omega)=S_0(\omega)*W(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)*W(\omega)=W(\omega-\omega_0) \tag{1}$$

В (1) була використана фільтруюча властивість дельта-функції. Сигнал $s(t)$ і його спектр $S(\omega)$ показані на рис.1.

Таким чином, замість дельта-імпульсу спектр $S(\omega)$ перетворився на функцію типу $\sin(x)/x$ (спектр прямокутного імпульсу функції $w(t)$) причому ширина пелюстка залежить від тривалості інтервалу аналізу, як це показано на рис. 2.

Якщо збільшувати інтервал аналізу T до нескінченості, то спектр звужуватиметься і прямуватиме до дельта-імпульсу. Прямокутний імпульс $w(t)$ називається віконною функцією. Розглянемо випадок ДПФ. ДПФ ставить у відповідність N відлікам сигналу $s(n)$, $n=0\ldots N-1$, N відліків спектру, узятих на одному періоді спектру: $S(k)$, $k=0\ldots N-1$ [3]. Відліки сигналу узяті через рівні проміжки часу $\Delta t=2\pi/\omega_\partial$ де ω_∂ – частота дискретизації (рад/с).

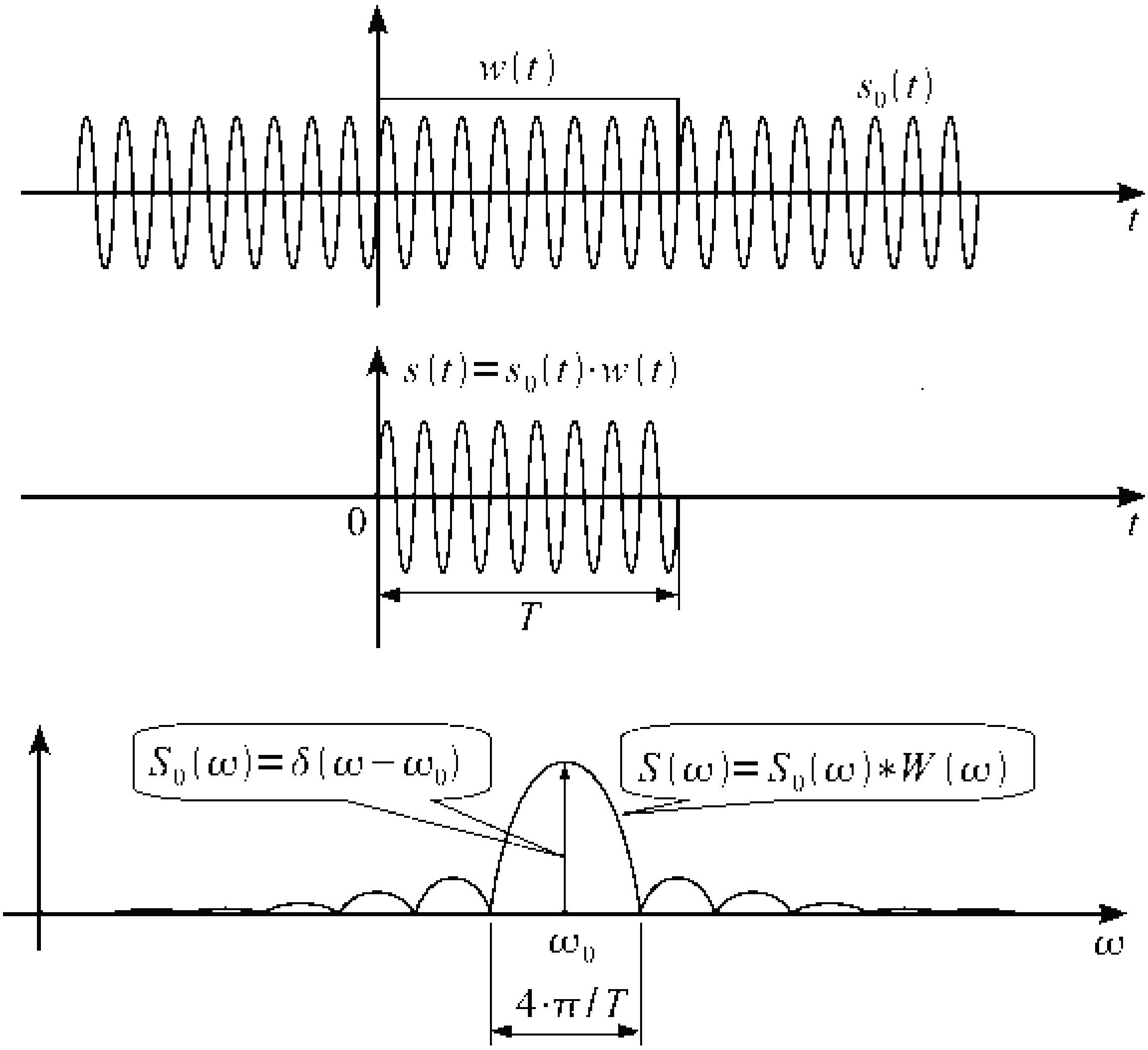

Рис. 1. Спектр обмеженого по часу сигналу

Таким чином інтервал аналізу $T = N \cdot \Delta t = N \cdot 2\pi/\omega_\partial$, тоді спектральні відліки беруться через інтервал $\Delta\omega = 2\pi/T$. Ширина головного пелюстка спектру $S(\omega)$ (рис. 1) дорівнює $4\pi/T$, тоді можна розглянути два випадки.

Перший випадок частота сигналу співпадає з k-ою частотою спектру $\omega_0 = \omega(k)$. При дискретизації отримаємо відлік на частоті $\omega_0 = \omega(k)$ по амплітуді, що відповідає амплітуді сигналу, решта спектральних відліків буде рівна нулю, бо моменти дискретизації спектру співпадуть з нулями спектру віконної функції.

Другий випадок коли частота ω_0 не співпадає ні з однією частотою із сітки спектральних відліків. В цьому випадку спектр сигналу «розмивається». Замість одного спектрального відліку отримуємо безліч відліків, оскільки дискретизація проводиться вже не в нулях спектру функції вікна, і всі бічні пелюстки проявляються в спектрі. Крім того амплітуда спектральних відліків також зменшується.

У випадку гладкої віконної функції в спектрі не спостерігається бічних пелюсток (або їх рівень істотно знижується), проте має місце розширення основної пелюстки спектру в порівнянні з прямокутним вікном $\Omega > 4\pi/T$.

Необхідно відзначити, що чим більше пригнічення бічних пелюсток спектру віконної функції, тим ширше виходить основна пелюстка. Це протиріччя призвело до розробки великої кількості віконних функцій із різним пригнічення бічних пелюсток і різної шириною головної пелюстки.

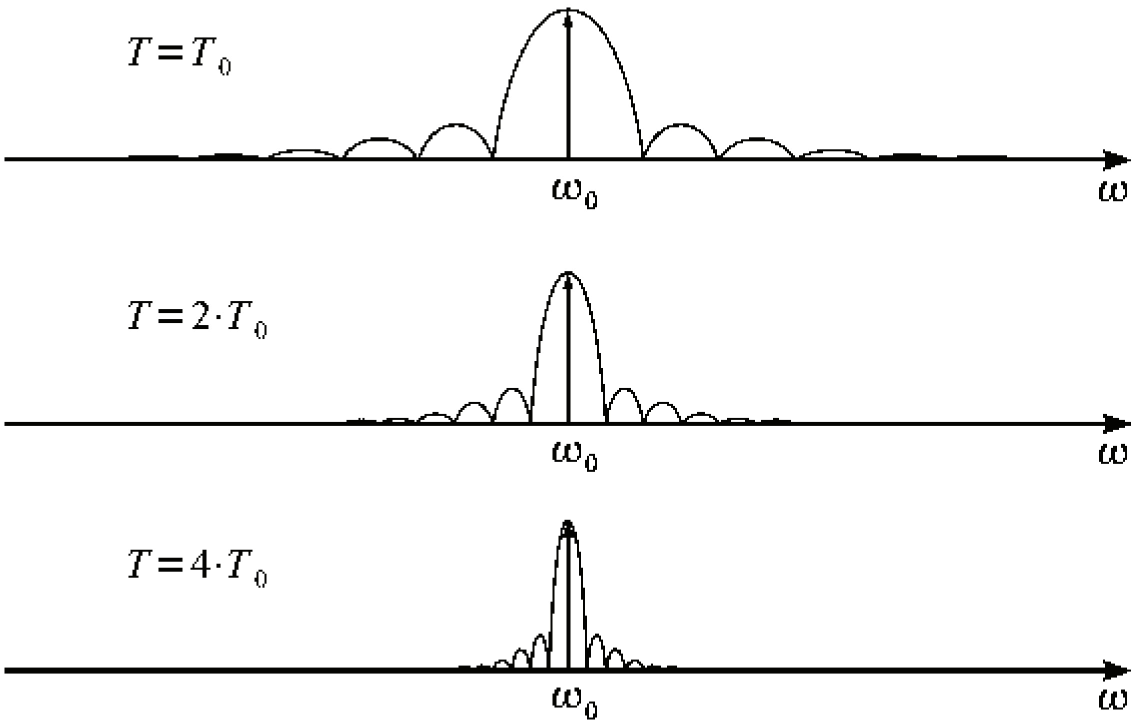

Рис.2. Зміна спектру при збільшенні інтервалу аналізу

Розглянемо ще одну властивість віконної функції, а саме коефіцієнт послаблення β. Нехай A_w – постійна складова віконної функції на інтервалі T [4]:

$$A_w = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt\,. \tag{2}$$

У випадку прямокутного вікна

$$A_{rect} = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T dt = 1\,. \tag{3}$$

Коефіцієнтом послаблення β називають відношення постійної складової A_w заданої функції вікна, до постійної складової прямокутного вікна A_{rect}:

$$\beta = \frac{A_w}{A_{rect}} = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt \tag{4}$$

Сенс коефіцієнта послаблення полягає в тому, що амплітуди всіх спектральних складових після множення на віконну функцію зменшуються в β разів у порівнянні з прямокутним вікном. Коефіцієнт послаблення виражають в логарифмічній шкалі:

$$\beta = 20 \cdot \lg \beta \text{ дБ} \tag{5}$$

У випадку цифрового спектрального аналізу маємо N відліків віконної функції $w(n)$ $n = 0 \ldots N-1$, взятих через проміжок Δt. Тоді $T = N \cdot \Delta t$ інтеграл в (4) замінюється сумою:

$$\beta = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w(n). \tag{8}$$

Для того, щоб врахувати коефіцієнт послаблення після ДПФ необхідно кожний спектральний відлік поділити на β.

Узагальнимо основні частотні характеристики спектру віконної функції, що дозволяють порівнювати різні вікна між собою. Для цього розглянемо нормовану амплітудно-частотну характеристику $W_H(F_H)$ віконної функції [2].

Нормування амплітуди проводиться для урахування коефіцієнта послаблення β: $W_H(\omega) = W(\omega)/\beta$. Таким чином всі амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) матимуть максимум рівний одиниці (0 дБ) на нульовій частоті. Оскільки ширина головної пелюстки залежить від тривалості вікна в часі (рис. 2), то вводиться нормування частоти:

$$F_H = \frac{\omega}{2\pi/T} = \frac{\omega \cdot T}{2 \cdot \pi}. \tag{7}$$

Таким чином, форма нормованої АЧХ віконної функції не мінятиметься при зміні тривалості вікна.

Для якісного спектрального аналізу необхідно. правильно вибрати віконну функцію виходячи з динамічного діапазону сигналу, так щоб рівень бічних пелюсток спектру віконної функції був менше динамічного діапазону сигналу.

При спектральному аналізі сигналу з відомим або заданим динамічним діапазоном необхідно вибирати таку віконну функцію, рівень бічних пелюсток спектру якої менше заданого динамічного діапазону. Інакше деякі гармоніки сигналу можуть бути не виявлені. Так, наприклад, якщо динамічний діапазон сигналу не перевищує 40 дБ доцільно використовувати вікно Хеммінга, бічні пелюстки спектру якої не перевищують -42 дБ. Якщо ж динамічний діапазон сигналу не перевищує 60 дБ, то можна використовувати вікно Блекмана (рівень бічних пелюсток спектру -58 дБ).

Висновки

Було розглянуто питання обчислення спектру сигналу при спостереженні на обмеженому часовому відрізку.

Показано, що обмеження часу аналізу рівносильно використанню прямокутної віконної функції, частотна характеристика якої має максимальні бічні пелюстки.

Описаний механізм зниження рівня бічних пелюсток шляхом згладжування за допомогою віконних функцій.

Список літератури

1. *Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Статистична фазометрія. Наукова монографія. – Тернопіль: ВЦ Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя, 2009. – 383с.

2. *Марченко В.Б.* Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике. – Киев: Наукова думка, 1992. – 212с.

3. *Игнатов В.А.* Теория информации и передачи сигналов. - М.: Советское радио, 1979.

4. *Lanczos C.* Discourse on Fourier Series. – New York: Hafner Publishing Co., 1966. Ch. 1. – pp. 29-30.