

СИСТЕМА МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНОГО ОПРАЦЮВАННЯ КУТОВИХ ДАНИХ

В статті представлено розроблену в середовищі LabView систему для моделювання та статистичного опрацювання випадкових кутових даних.

Огляд сучасних інженерних та математичних програмних засобів засвідчив певну обмеженість їх можливостей для реалізації задач кутометрії.

Постановка задачі. Необхідно розробити в середовищі LabView систему статистичного аналізу кутових даних з функціями:

- генерування вибірок випадкових кутів (ВК) із заданими розподілом і обсягом;
- обчислення основних статистичних характеристик вибірок ВК;
- визначення довірчих інтервалів при оцінці кругового середнього.

Метою статті є дослідження особливостей обчислення статистичних характеристик для випадкових кутових даних.

В статті пропонується розгляд програмного засобу для моделювання та статистичної обробки вибірок випадкових кутів.

Розроблена система містить наступні модулі:

1. Модуль генерування вибірок випадкових кутів з різними розподілами ймовірності.

Для розширення функціональних можливостей система передбачає формування вибірок малого обсягу зі сформованих генеральних вибірок, що належать до таких законів розподілу, як розподіл Мізеса, намотаний Коші, намотаний нормальний, намотаний Леві та кардіоїдний, – та керування їх параметрами.

Генерування вибірок таких розподілів, як рівномірний, розподіл Мізеса, намотаний нормальний та намотаний Коші розглядалось в [1].

Приклад відображення згенерованої вибірки випадкових кутів з розподілом Мізеса та параметрами $k = 4, \mu = 0$ обсягом 10000 значень представлено на рис. 1.

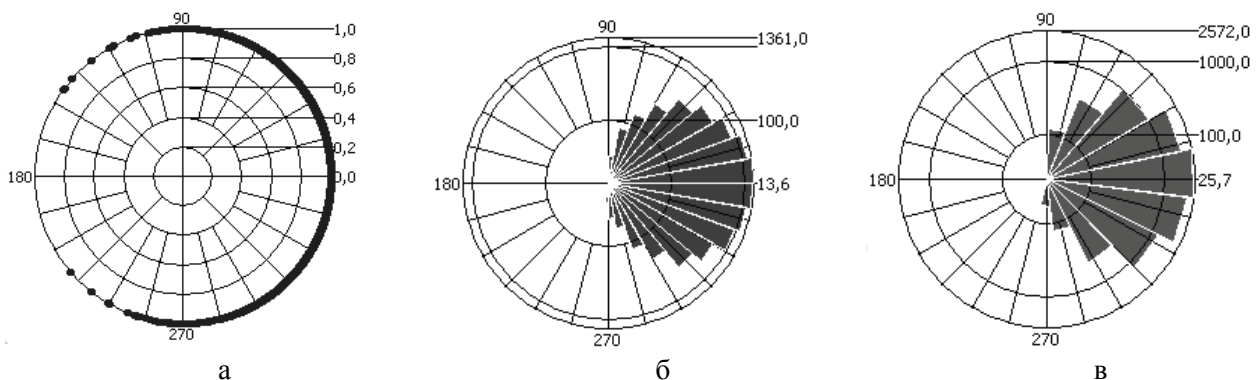


Рис. 1. Приклади кругових діаграм, що відображають вибірку випадкового кута з розподілом Мізеса: а – представлення вибірки на одиничному колі; б – роза вітрів, отримана розбиттям кутової шкали на 36 секторів по 10 градусів; в – роза вітрів, отримана розбиттям вибірки на 15 інтервалів.

Намотаний розподіл Леві є асиметричним з функцією щільності ймовірності:

$$f_{WL}(\theta; \mu; c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{e^{-c/2(\theta+2\pi n-\mu)}}{(\theta+2\pi n-\mu)^{3/2}}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (1)$$

де c – коефіцієнт масштабу, μ – параметр положення. При $(\theta + 2\pi n - \mu) \leq 0$ $f_{WL} = 0$.

На рис. 2 показано функцію щільності ймовірності, гістограму вибірки обсягом 100 значень та зображення на колі намотаного розподілу Леві з параметрами $\mu = 0, C = 3$.

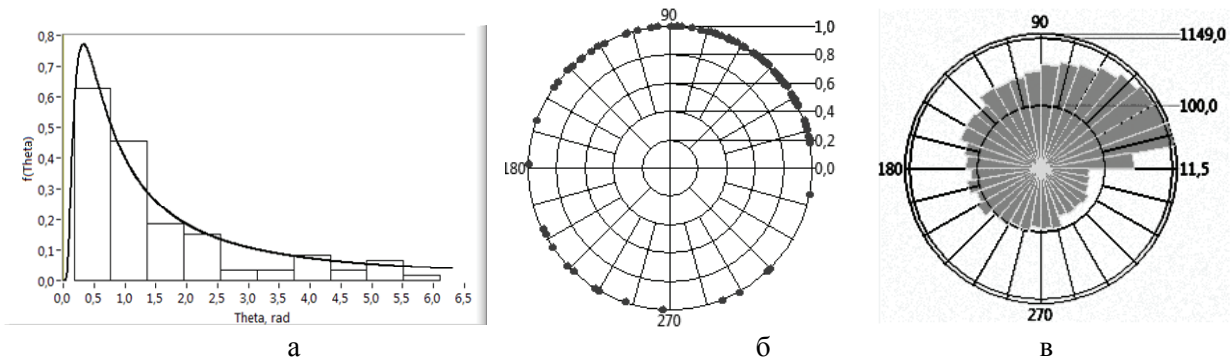


Рис. 2. Гістограма вибірки випадкових кутів, розподілених за намотаним законом Леві та його функція щільності ймовірності – а, розсіяння вибірки на одиничному колі – б та кутова діаграма – в.

Кардіоїдний розподіл – це симетричний унімодальний двопараметровий закон розподілу з функцією щільності ймовірності:

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \{1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)\}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1/2, \quad (2)$$

де μ – параметр центру розподілу, ρ – параметр масштабу. При $\rho \rightarrow 0$ розподіл прямує до рівномірного. Реалізація випадкового обсягом 100 значень з параметрами $\mu = 0, \rho = 0,3$ показана на рис. 3 в полярних координатах.

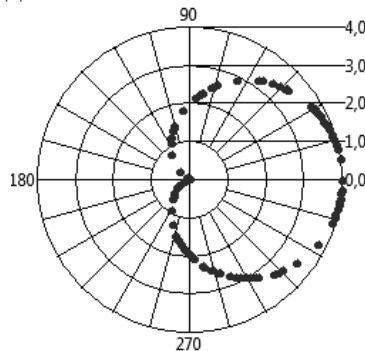


Рис. 3. Реалізація випадкового кута з кардіоїдним розподілом в полярних координатах.

Крім вищезазначених законів розподілу також реалізовано асиметричний закон розподілу, функція щільності ймовірності якого має вигляд:

$$f(\theta; k) = C \sin \theta \exp\{k \cos(\theta)\}, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad (3)$$

де C та $k > 0$ – параметри масштабу. Його функція щільності ймовірності, гістограма вибірки випадкового кута з параметрами $k = 1,2, C = 0,4$ обсягом 100 значень, та зображення на колі показано на рис. 4.

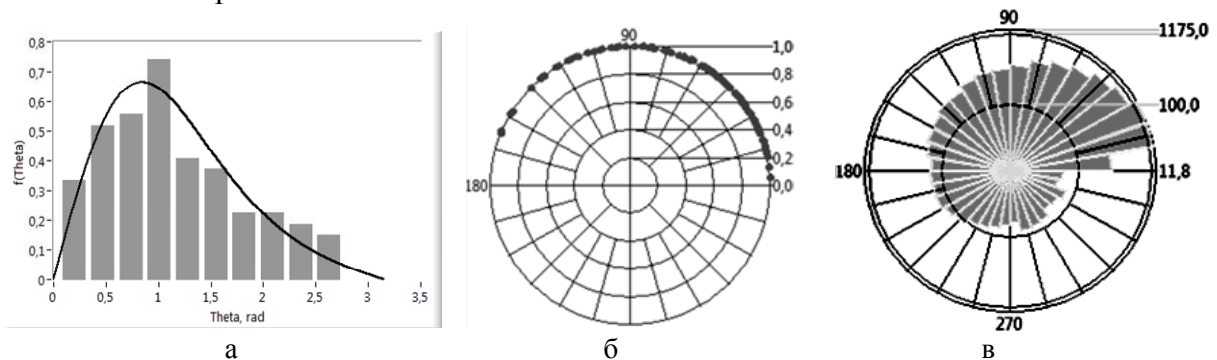


Рис. 4. Гістограма вибірки випадкових кутів, розподілених за асиметричним законом (3) та його функція щільності ймовірності – а, розсіяння вибірки на одиничному колі – б та кутова діаграма – в.

Генерування вибірок випадкових кутів, що підпорядковуються зазначеним законам відбувалось методом оберненої функції [7]. Його суть полягає в тому, що неперервну випадкову величину з функцією розподілу $F(x)$, яка існує на інтервалі $x \in (-\infty, \infty)$, одержують шляхом функціонального перетворення ВВ з рівномірним розподілом в області значень $\alpha \in [0,1]$

$$\xi = F^{-1}(\alpha), \quad (4)$$

де $F^{-1}(\bullet)$ – обернена функція $F(x)$. Вважається, що $F^{-1}(\alpha)$ існує.

Панель відображення результатів модельованих даних показана на рис. 5. У якості прикладу показано відображення на колі генеральної вибірки, сформованої за законом розподілу Мізеса, обсягом $M = 10000$, середнім кутом $\mu = \pi$, параметром концентрації $k = 4$, та сформована з неї мала вибірка обсягом $M = 15$. Числові значення кутів малої вибірки в градусах після операції сортування показані на рисунку у вікні “Sorted small sample”.

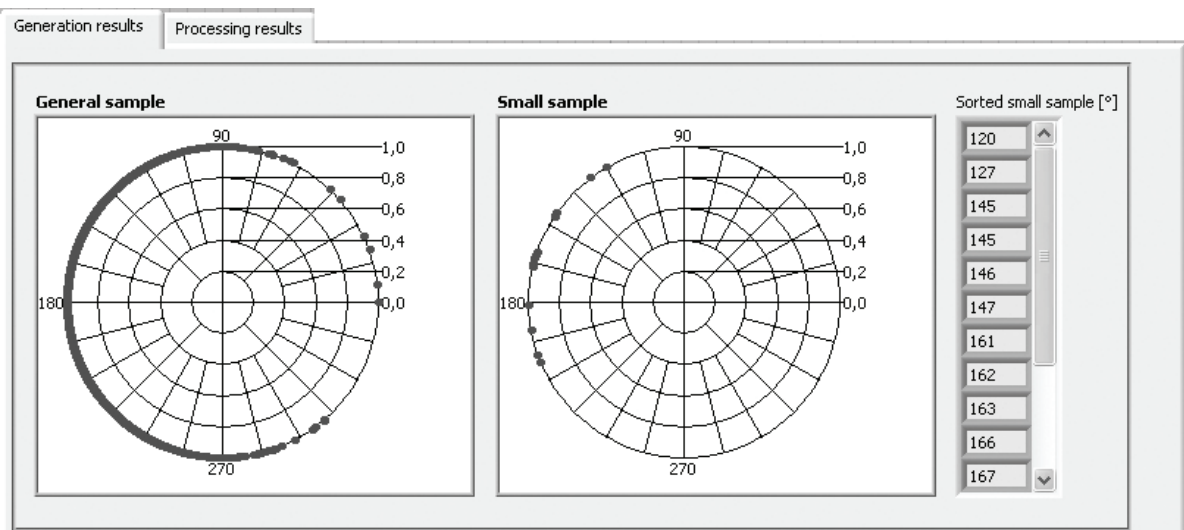


Рис. 5. Панель відображення результатів генерування кутових даних

2. Модуль обчислення статистичних характеристик.

У теорії і практиці вимірювань добре відомі і широко застосовуються числові статистичні характеристики для аналізу розподілених на прямій випадкових величин. Це середнє арифметичне, оцінка дисперсії, СКВ, медіана та ін. Однак використання цих статистик у задачах опрацювання результатів кутових та фазових вимірювань має певні обмеження [3].

Даний програмний комплекс включає розрахунок основних статистичних характеристик випадкових кутів (випадкових фазових зсувів сигналів) за вибіркою $\{\theta_j\}$, $j = \overline{1, M}$, обсягу M :

1) вибіркоче кругове середнє:

$$\mu_1 = \left\{ \arctg \frac{S}{C} + \frac{\pi}{2} \{ 2 - (\text{sign} S) \times [1 + \text{sign} C] \} \right\}; \quad (5)$$

$$\text{де } C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos \theta_j; \quad S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin \theta_j;$$

2) вибіркова довжина результуючого вектора r :

$$r = \sqrt{C^2 + S^2}; \quad (6)$$

3) вибіркова кругова дисперсія V :

$$V = 1 - r; \quad (7)$$

4) кругове стандартне відхилення статистики різниць ФХС σ :

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1-V)} = \sqrt{-2 \ln r}; \quad (8)$$

5) вибіркова мода. Точка кола, в околі якої спостерігається максимальна концентрація значень статистики.

6) вибірковий круговий розмах W – довжина найменшої дуги одиничного кола, що містить вибірку $\{\theta_j\}$ та визначається з варіаційного ряду

$$T_j = \phi_{j+1} - \phi_j, j = 1, \dots, M-1; T_M = 2\pi - \phi_M + \phi_1; W = 2\pi - \max\{T_1, \dots, T_M\}; \quad (9)$$

7) вибірковий тригонометричний момент порядку u відносно напрямку α (u – ціле число):

$$T_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{iu(\theta_j - \alpha)} = a_u(\alpha) + ib_u(\alpha) = r_u(\alpha) e^{i\mu_u(\alpha)}; \quad u = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

$$a_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos[u(\theta_j - \alpha)] = a_u(0) \cos(u\alpha) + b_u(0) \sin(u\alpha);$$

$$b_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin[u(\theta_j - \alpha)] = -a_u(0) \sin(u\alpha) + b_u(0) \cos(u\alpha);$$

$$r_u(\alpha) = \sqrt{a_u^2(\alpha) + b_u^2(\alpha)} = \sqrt{a_u^2(0) + b_u^2(0)} = r_u(0);$$

$$\mu_u(\alpha) = \mu_u(0) - u\alpha;$$

8) вибіркова характеристика асиметрії (ВХА) g_1 :

$$g_1 = b_3(\mu_1)/V^{3/2} = r_2 \sin[\mu_2(0) - 2\mu_1]/V^{3/2}; \quad (11)$$

9) вибіркова характеристика ексцесу статистики різниць ФХС (ВХЕ) g_2 :

$$g_2 = [r_2 \cos[\mu_2(0) - 2\mu_1] - (1-V)^4]/V^2. \quad (12)$$

3. Модуль оцінки довірчих інтервалів.

Основними формами представлення похибки результатів вимірювань є розширена невизначеність та довірчий інтервал. Розроблений програмний комплекс має можливість визначення довірчого інтервалу за двома методами – класичним та методом «розкрутки» (Bootstrap method). Класичний метод передбачає оцінку середнього кута $\bar{\theta}$ та емпіричного середнього квадратичного відхилення для кутів вибірки $\hat{\sigma}$, визначення коефіцієнтів Стьюдента з урахуванням гіпотези про близький до гаусівського розподіл кругового серединного кута і формування довірчого інтервалу як $\bar{\theta} \pm t_{n, P_{\text{дор}}} \hat{\sigma}$. Методи «розкрутки» або перестановки вперше були описані Бредлі Ефроном у 1979 році. Вони мають ряд модифікацій в залежності від застосування та вимагають великої кількості обчислень [5]. Застосування методу для знаходження довірчого інтервалу випадкового кута полягає у побудові $j = 1 \dots N$ вибірок $\{\theta'_1 \dots \theta'_n\}$ із заданої вибірки $\{\theta_1 \dots \theta_n\}$, визначенні кутових середніх напрямів $\mu'_1 \dots \mu'_N$ «розкручених» вибірок та побудові з них варіаційного ряду $\mu'_1 \leq \dots \leq \mu'_N$. Для 95% довірчого інтервалу знаходяться 2,5 та 97,5 процентілі.

Для режиму опрацювання вхідної вибірки методом «розкрутки» система передбачає попередню її діагностику та визначення обсягу та прийняття рішення про виконання однієї з двох вбудованих модифікацій методу. Алгоритм для побудови довірчого інтервалу для малих ($n < 30$) вибірок детально описано в [6]. У випадку $n \leq 8$ вибірка вважається «дуже малою» та передбачає застосування алгоритму з більшою кількістю обчислень [2]. Значення $n = 8$ було обрано експериментально при проведенні більше 1000 дослідів для двох розглянутих методів та порівняння такого показника, як довжина довірчого інтервалу.

4. Модуль графічного представлення результатів.

Результати генерування та опрацювання випадкових кутів представлені на панелі відображення у вигляді гістограм та кругових діаграм (рис. 7, 8).

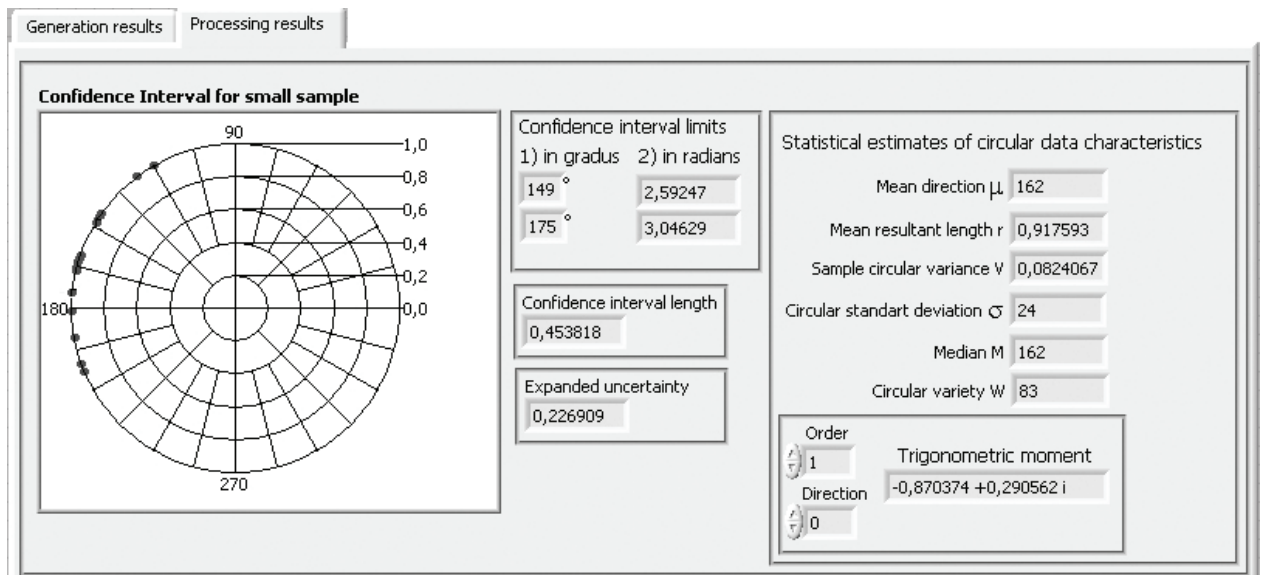


Рис. 7. Панель відображення результатів генерування та опрацювання кутових даних
Панель керування режимами роботи системи представлена на рис. 8.

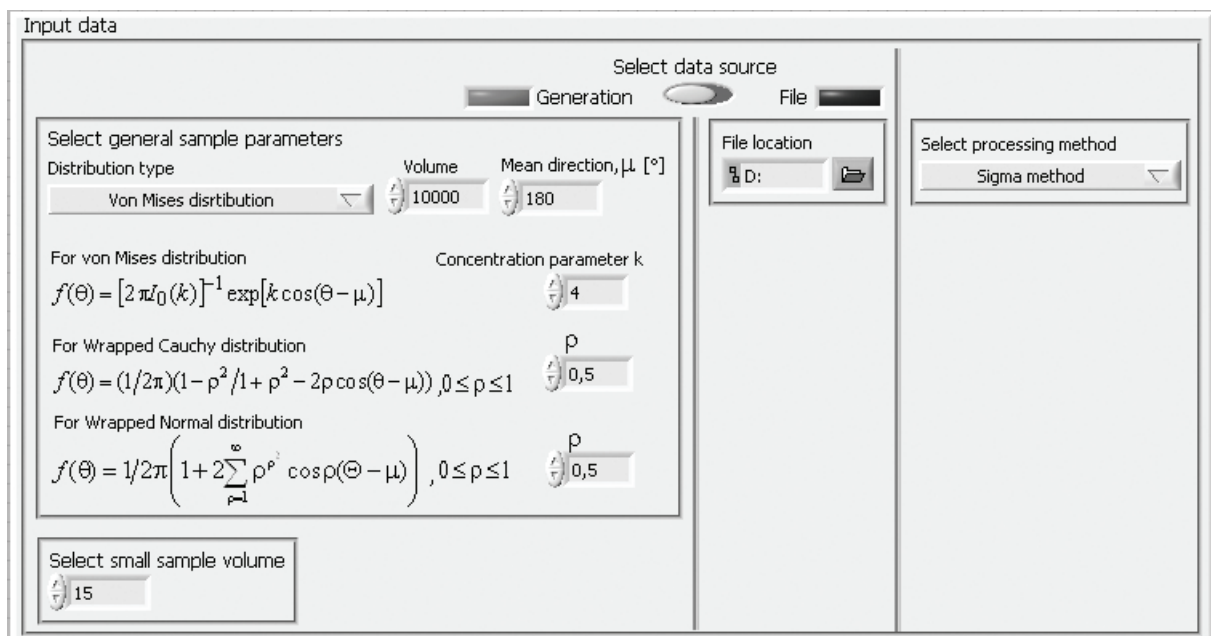


Рис. 8. Панель керування системою

Розроблена система дозволяє проводити комп'ютерні вимірювальні експерименти з випадковими кутами, порівнювати ефективність різних алгоритмів опрацювання кутових даних, візуалізувати результати розрахунків.

Висновки

В статті розглянуто розроблену в середовищі LabView систему, призначену для опрацювання та моделювання результатів кутових та фазових вимірювань.

Система може бути використана для:

- 1) моделювання вибірок випадкових кутів з розподілами Мізеса, намотаного Коші та намотаного нормального з можливістю керування їх параметрами;
- 2) статистичне опрацювання малих вибірок, кутових даних та розрахунок основних статистичних характеристик для вибірок випадкових кутів різного обсягу;

3) визначення довірчих інтервалів для вибірок випадкових кутових значень за двома методами – класичним та «розкрутки» з попередньою діагностикою вхідної вибірки для вибору модифікації методу «розкрутки» в залежності від її обсягу;

5) графічного відображення результатів моделювання вибірок випадкових кутів та результатів їх опрацювання.

Список літератури

1. Circular data simulation: proceedings the fourth world congress [“Aviation in the XXI-st century 2010”], (Kyiv, 21-23 September 2010) / Blizniuk E.D., Kuts Y.V., Shengur S.V., Shcherbak L.M. [etc.]. – К.: НАУ, 2010. – Р. 12.21-12.26.

2. Fisher N.I. Statistical analysis of circular data. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.–277 p.

3. Куц Ю.В. Статистична фазометрія./Куц. Ю.В., Щербак Л.М. – В.:Тернопіль, 2009,– 383с.

4. Mardia K.V. Statistics of Directional Data / K.V. Mardia and P.E. Jupp – London: Academic Press Inc., 1972 – 415 p.

5. B. Efron and R. Tibshirani. Source Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy Author(s): B. Efron and R. Tibshirani Source: Statistical Science, Vol. 1, No. 1 (Feb., 1986), pp. 54-75.

6. Куц Ю.В., Шенгур С.В., Щербак Л.М. Характеристика кутових вимірювань при статистиках малого обсягу // Системи обробки інформації. – Збірник наукових праць. – Випуск 4(85). – Харків, 2010, – С.92-95.

7. Куц Ю. В., Бабак В.П. Комп’ютерне моделювання задач кутових вимірювань // Матеріали IV Міжнар. наук.-техн. конф. “Авіа-2002”. – Т. 1: Інформаційно-діагностичні системи. –К.: НАУ, 2002. - С.11.1-11.