УДК 519.2

Н.Б. Марченко, кандидат технічних наук
(Національний авіаційний університет, Україна).

ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ СУБГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПОРІВНЯННІ З НЕРІВНІСТЮ ЧЕБИШОВА

Розлядається проблема використання моделей випадкових процесів, які називаються субгауссовими випадковими процесами, що використовуються при аналізі роботи інформаційно-вимірювальних систем.

На практиці при проведені вимірювань виникає проблема, коли апріорно не відомі статистичні характеристики результатів окремих вимірювань, наприклад: функція розподілу, щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсія тощо. Це в свою чегру не дає можливості побудувати оцінку достовірності та точності отримуваних результатів вимірювання. Для подолання цих труднощів використовують різного типу нерівності, що характеризують достовірність при заданій точності. Такого типу нерівності часто мають місце не для окремих функцій розподілу, а для деякого класу величин і процесів. На сьогоднішній день широко відомі і успішно використовуються кілька нерівностей такого типу. Найбільш поширеними в класі процесів із скінченною дисперсією (гільбертових) є нерівність Чебишова та різні її форми. Нерівності такого типу дають змогу в більшій або меншій мірі отримати межі точносних характеристик при використанні стохастичних моделей.

Апріорна інформація про те, що процес є субгауссовим, дає можливість в цьому класі більш точно оцінити результат вимірювань при меншій затраті матеріальних та часових ресурсів. Слід одразу зауважити, що в роботі не йде мова про підвищення точності того чи іншого конкретного вимірювання чи якоїсь конкретної системи. Як буде показано нижче, модель субгауссових процесів в ряді випадків дозволяє покращити оцінки точності, які дає нерівність Чебишова при обробці результатів вимірювання та в методі перевірки стохастичних гіпотез. Таким чином виникає задача розробки методів і відповідних алгоритмів оцінювання точносних характеристик ІВС на базі моделей субгауссових процесів. Всі отримані в роботі результати мають теоретичне значення та практичне застосування при обробці даних вимірювання, при моделювані випадкових процесів, в теорії масового обслуговування, фінансовій математиці, статистиці випадкових процесів та в різних областях природничих і соціальних наук, у яких використовуються методи теорії випадкових процесів.

Розв’язуючи задачу моделювання випадкового процесу за допомогою ЕОМ, потрібно мати апріорну інформацію про процес. Так, якщо процес гауссовий, то необхідно знати його математичне сподівання та коваріаційну функцію. Іноді для розв’язування задачі досить моделювати процес за неповними даними. Цікавим є моделювання субгауссових випадкових величин та процесів [1, 2]. Використання класу субгауссових випадкових величин дає можливість звузити границю довірчого інтервалу, порівнюючи з використанням нерівності Чебишова, а також покращити методичну похибку.

Щоб застосувати нерівність Чебишова [4] при дослідженні випадкового процесу $\{\xi(t), t \in T\}$ треба знати другий центральний момент (дисперсію) параметра, що моделюється. Але часто отримати хорошу оцінку дисперсії не вдається і, навіть, маючи її для випадкового процесу ми повинні певним чином перейти від точкових оцінок для дисперсії в фіксований момент часу до рівномірних оцінок на всьому інтервалі часу T, де заданий моделюючий процес. Задачу можна спростити, якщо використати апріорну інформацію, зокрема про те, що процес є субгауссовим. Тоді ми можемо отримати оцінку аналогічну нерівності Чебишова, але рівномірну на всьому інтервалі часу. В цьому випадку роль дисперсії грає субгауссовий стандарт. Аналогічна задача виникає при оцінюванні точності роботи різних інформаційно-вимірювальних систем та приладів за методом довірчих інтервалів, коли функція розподілу похибки вимірювань невідома.

За рахунок апріорної інформації про клас розподілів, в даному випадку клас $Sub(Щ)$, є можливість звузити границі довірчого інтервалу, тобто підвищити ймовірність того, що випадкова величина потрапить в оцінюваний довірчий інтервал [4].

Зупинимося на деяких математичних викладках стосовно визначення та властивостей субгауссових величин та процесів. Трійка $\{Щ\mathsf{F}, \mathbf{P}\}$, де Щ – простір елементарних подій, F – деяка алгебра підмножин Щ, $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}(A), \quad A \in \mathsf{F}\}$ – ймовірнісна міра. Ця трійка формально задає деяку ймовірнісну модель експерименту, яку будемо надалі називати ймовірнісним простором.

Позначимо через $F(x)$ функцію розподілу випадкової величини o

$$F(x) = \mathbf{P}\{o < x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідна їй характеристична функція випадкової величини o, виражається таким чином [3]

$$f(u) = \mathbf{M}\exp(iuo) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux)dF(x), \quad u \in \mathbf{R} \cdot$$

Позначимо експоненційну генератрису (твірну функцію) кумулянт випадкової величини o

$$g(y) = \ln \mathbf{M}\, e^{yo} = \ln f(-yi), \quad y \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

За допомогою генератриси (1) знаходяться моменти випадкової величини o згідно виразу

$$\mathbf{M}o^k = \left.\frac{d^k e^{g(y)}}{dy^k}\right|_{y=0}. \tag{2}$$

Зупинимось коротко на суті математичної формалізації ймовірнісної моделі, яка базується на понятті субгауссовості випадкових величин та процесів.

Випадкову величину o називають субгауссовою [1], якщо знайдеться таке дійсне число $б \geq 0$, що для всіх $y \in \mathbf{R}$ виконується нерівність

$$e^{g(y)} \leq e^{\frac{б^2 y^2}{2}}, \tag{3}$$

де $g(y)$ визначається згідно (1).

Клас субгауссових величин позначається $Sub(Щ)$ [1].

Введемо позначення

$$ф(o) = \inf\left\{б \geq 0 : e^{g(y)} \leq e^{\frac{б^2 y^2}{2}}, y \in \mathbf{R}\right\}, \tag{4}$$

$ф(o)$ – називається субгауссовим стандартом випадкової величини o. Тобто $ф(o)$ – це найменше невід'ємне $б$, яке задовольняє вираз (4) для всіх $y \in \mathbf{R}$.

Таким чином, квадрат субгауссового стандарту це границя, яка обмежує логарифм генератриси помножений на $2/y^2$, $ф^2(o) \geq \frac{2}{y^2} g(y)$, де $y \in \mathbf{R}$.

Теорема [1]. *Якщо o є субгауссовою випадковою величиною з* $ф(o) > 0$, то тоді для всіх $x > 0$ має місце нерівність

$$\mathbf{P}\{|o| > x\} \le 2\exp\left(-\frac{x^2}{2ф^2(o)}\right). \qquad (5)$$

Приклади.

1. Оцінемо по результатам спостереження o_k, $k \in \overline{1,n}$ математичне сподівання випадкової величини $o \in \mathsf{N}(и,1)$. Для точкової оцінки математичне сподівання

$$н_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k .$$

Апріорний розподіл ξ_k – гауссовий. Тому $н_n \in \mathsf{N}\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, звідки $\frac{н_n - \theta}{\sqrt{n}} \in \mathsf{N}(0,1)$.

Згідно першому наслідку з нерівності Чебишова, при $\varepsilon = 3$, маємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}} \ge \varepsilon\right\} \le \varepsilon^{-2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11. \qquad (6)$$

Згідно (5), маємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}} \ge \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau\left(\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}}\right)}\right\} = 2\exp\left\{-\frac{9}{2}\right\} \approx 0{,}02. \qquad (7)$$

Якщо безпосередньо використати інформацію про те, що ν_n має стандартний гауссовий розподіл, то отримуємо значення

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}} \ge \varepsilon\right\} \approx 0{,}003. \qquad (8)$$

Отже, використання субгауссового стандарту у порівнянні з нерівністю Чебишова дає можливість в даному випадку підвищити оцінку нижньої межі довірчої ймовірності з 0,89 до 0,98, в той час як теоретично її точне значення становить 0,997.

2. У випадку $\varepsilon = 2$, використовуючи (6) отримаємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}} \ge \varepsilon\right\} \le \varepsilon^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25 . \qquad (9)$$

Згідно (5) маємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}} \ge \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau\left(\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}}\right)}\right\} = 2\exp\{-2\} = 0{,}271. \qquad (10)$$

Якщо безпосередньо використати інформацію про те, що ν_n має стандартний гауссовий розподіл, то отримуємо значення

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}} \ge \varepsilon\right\} \approx 0{,}046. \qquad (11)$$

Аналізуючи рівності (9) та (10), можна зробити висновок що у цьому випадку доцільніше використовувати нерівність Чебишова, ніж субгауссовий стандарт, який в даному випадку не дає можливість підвищити оцінку нижньої межі довірчої ймовірності.

3. У випадку $\varepsilon = 4$, використовуючи (6) отримаємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625. \qquad (12)$$

Згідно (7), маємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau\left(\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}}\right)}\right\} = 2\exp\{-8\} \approx 6{,}7\cdot 10^{-4}. \qquad (13)$$

У випадку стандартного гауссового розподілу отримаємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\nu_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \approx 4\cdot 10^{-4}. \qquad (14)$$

При $\varepsilon = 4$ використання (13) має значну перевагу у порівнянні з (12). А отриманий результат при використанні субгауссового стандарту становить 0,99933 є досить близьким у порівнянні з використанням (14) і становить 0,9996.

При $\varepsilon \geq 5$ вирази (13) та (14) стають майже еквівалентними. Отже, як було вказано вище, використання субгауссового стандарту має місце для “великих” інтервалів.

Висновки

Використовуючи інформацію про можливість застосування моделі субгауссових величин або процесів при оцінці точності роботи ІВС можна суттєво знизити методичну похибку викликану використанням “звичайної” нерівності Чебишова. Зокрема це можна використати як при оцінці точності результатів вимірювання, так і при оцінці якості моделювання роботи різних ланок ІВС.

Модель субгауссових розподілів дозволяє покращити оцінки точності, які дає нерівність Чебишова при обробці результатів вимірювання та в методі перевірки стохастичних гіпотез.

Ефективність використання субгауссових розподілів суттєво залежить від довжини довірчих інтервалів і для довірчого інтервалу, довжина якого менша критичного, вона незастосовна.

Список літератури

1. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О.* Моделювання випадкових процесів. Навчальний посібник для студентів механіко-математичних спеціальностей. – К.: ВЦ “Київський університет”, 1999. – 223с.

2. *Марченко Н.Б.* Використання моделей субгауссівських процесів при моделюванні інформаційних сигналів // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: “Проблеми сучасної електротехніки”. – 2004. – Ч. 5. –С.117-120.

3. *Марченко Н.Б.* Деякі особливості використання субгауссових випадкових процесів в інформаційно-вимірювальних системах . // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т.9, №4. – С. 139-146.

4. *Марченко Н.Б.* Про другий наслідок з нерівності Чебишева та його використання при оцінці точності вимірювань // Тези доповідей V Міжнародної науково-технічної конференції “АВІА-2003”. – Т.1. – Київ: Національний авіаційний університет. – 2003. – С.11.101-11.104.