УДК 519.872

С.В. Пустова, кандидат технічних наук,
(Національний авіаційний університет, Україна)

БАГАТОКАНАЛЬНА СИСТЕМА ЧЕРГ З ПОВЕРНЕННЯМИ З НЕЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМИ ЧАСАМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ

У статті розглядається багатоканальна система черг з неекспоненціальними часами обслуговування заявок без втрат. Побудовано аналітичну модель цієї системи. Розроблено чисельний метод її розв'язання. Представлено деякі графічні результати.

Теорія систем черг з поверненнями отримала широкий розвиток останні 20 років [1–2], надавши можливості удосконалення технології дослідження і проектування нових складних систем. Такі системи характеризуються наступною поведінкою. Якщо заявка надходить до системи, у якій усі канали обслуговування і усі (за їх наявності) місця у черзі зайняті, вона залишає систему на деякий випадковий проміжок часу (іншими словами йде на орбіту, або утворює ждерело повторних заявок), а потім знову повторює спробу отримати обслуговування. Орбіта – це віртуальне середовище накопичення заявок, які не змогли одразу отримати обслуговування. Заявки, які знаходяться на орбіті, можуть називатись поверненнями, повторними заявками або викликами, клієнтами, що повертаються до системи.

Бібліографічний аналіз з теорії систем черг з поверненнями показує, що майже всі визначні результати, як аналітичні, так і статистичні, отримані для експоненціально розподілених часів. Хоча в деяких роботах (наприклад, [3–4]) розглядається цикл орбіти з неекспоненціальними часами розподілу викликів.

Системи черг з поверненнями мають шіроке прикладне застосування у телекомунікаційних системах і мережах [3–5], у банківських і фінансових системах, у системах посадки літаків. Ігнорування потоку повторних заявок може призвести до значних похибок у інженерних рішеннях, особливо це стосується проектування сучасних складних систем.

Класифікація Кендалла. Згідно з класифікацією Кендалла системи черг можна описати за допомогою наступного виразу [5]

$$A / B / s / m / N / O / K$$

де A and B – розподіли інтервалів між надходженням заявок і часами обслуговування відповідно,

s – кількість каналів обслуговування,

m – кількість місць очікування чи місць очікування та кількості каналів обслуговування (розмір системи),

O – ємність орбіти – максимальне число викликів, що можуть знаходитись на орбіті,

H – система з втратами (якщо H = NL, то система вважається системою без втрат),

K – розподіл викликів на циклі орбіти.

Якщо четверта позиція в нотації Кендалла відсутня, то припускають, що $m = 0$. Якщо відсутня п'ята позиція, то припускають, що $K = M$, тобто інтервали часу між викликами на циклі орбіти розподілені експоненціально.

Постановка задачі. Розглянемо систему черг типу $M / E_2 / c$ поверненнями, тобто бакатоканальну систему з Пуасонівським вхідним потоком заявок, з експоненціальним розподілом інтервалів часу між викликами на циклі орбіти, з часами обслуговування, розподіленими за законом Ерланга 2-го порядку, з нескінченною орбітою, без втрат з метою знаходження ймовірнісних характеристик системи.

Опис системи. Розглянемо систему (рис. 1) з c каналами, до якої надходить Пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ. Якщо у системі є вільний канал обслуговування, заявка отримає обслуговування одразу ж і залишить систему після цього. В інакшому випадку, якщо усі канали зайняті на час надходження заявки, то вона стає джерелом повторних викликів (повернень). Такі виклики і утворюють орбіту. Кожне таке джерело утворює потік повторних заявок, які будуть намагатись отрімати обслуговування до тих пір, поки один із каналів не звільниться. У такому випадку джерело повернень зникає.

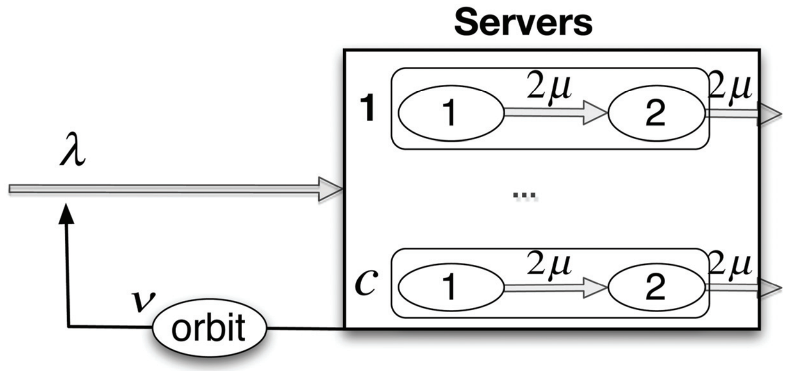

Рис. 1. Функціонування системи

Припустимо, що інтервали між вдалими повторними спробами розподілені експоненціально з параметром ν, а часи обслуговування розподілені за законом Ерланга другого порядку з параметром μ (з щільністю розподілу $b(x)=(2\mu)^2 xe^{-(2\mu)x}$). Також, припустимо, що інтервали між надходженням викликів, інтервали між поверненнями та часами обслуговування є взаємонезалежними.

Аналітична модель. Функціонування розглядуваної системи можна описати за допомогою тривимірного процесу $(Z(t), X(t), Y(t))$, де $X(t)$, $Y(t)$ є кількістю зайнятих каналів на першій і другій фазах у момент t відповідно, $X(t)+Y(t)\le c$ – кількість зайнятих каналів, $Z(t)$ – кількість повторних заявок у момент t. Враховуючи викладені припущення, процес $(Z(t), X(t), Y(t))$ є Марковським з $S=\{0,1,...\}\times\{0,1,...,c\}\times\{0,1,...,c\}$.

Визначимо інфінітезімальні інтенсивності процесу $(Z(t), X(t), Y(t))$ для часу $(t, t+dt)$.

Зі стану (k,i,j), $k\ge 0$, $i=\overline{0,c}$, $j=\overline{0,c}$, $i+j\le c$ за час dt система може з імовірністю (рис. 2)

- λdt перейти у стан $(k,i+1,j)$, $i+j<c$, $i<c$ (новий первинний виклик надійшов до системи і зайняв вільний канал);
- λdt перейти у стан $(k+1,i,j)$ (новий виклик надійшов до системи і, знайшовши усі канали зайнятими, пішов на орбіту);
- $k\nu$ перейти у стан $(k-1,i+1,j)$, $i+j<c$, $i<c$, $k>0$ (один із повторних викликів зробив вдалу спробу отримати обслуговування);
- $2\mu i$ перейти у стан $(k,i-1,j+1)$, $i>0$, $j<c$ (один із викликів закінчив обслуговування на першій фазі);
- $2\mu i$ перейти у стан $(k,i,j-1)$, $j>0$ (один із викликів завершив обслуговування на другій фазі і залишив систему).

Нехай $p_{kij}(t)=P\{Z(t)=k, X(t)=i, Y(t)=j\}$ ймовірність того, що у момент t система знаходиться у стані (k,i,j), p_{kij} – відповідні стаціонарні ймовірності (якщо будь-який індекс p_{kij} менший за нуль, тоді відповідна компонента рівняння буде рівною нулю). Ці ймовірності задовольняють наступній системі рівнянь Колмогорова:

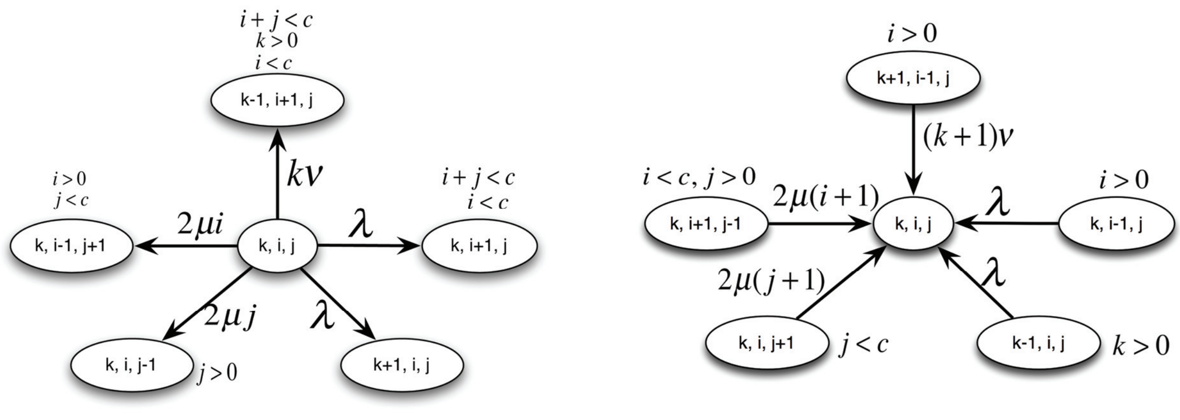

Рис. 2. Діаграми переходів системи

$$p_{kij}(2\lambda+2\mu(i+j)+k\nu)=\lambda p_{k,i-1,j}+\lambda p_{k-1,i,j}+(k+1)\nu p_{k+1,i-1,j}+2\mu(i+1)p_{k,i+1,j-1}+$$
$$+2\mu(j+1)p_{k,i,j+1},\ 0<i<c, 0<j<c, i+j<c \quad (1)$$

$$p_{kij}(\lambda+2\mu(i+j)+k\nu)=\lambda p_{k,i-1,j}+\lambda p_{k-1,i,j}+(k+1)\nu p_{k+1,i-1,j}+2\mu(i+1)p_{k,i+1,j-1}$$
$$0<i<c, 0<j<c, i+j=c \quad (2)$$

$$p_{k00}(2\lambda+k\nu)=\lambda p_{k-1,0,0}+2\mu p_{k,0,1}, k>0, \quad (3)$$

$$p_{k0c}(\lambda+2\mu c)=\lambda p_{k-1,0,c}+2\mu p_{k,1,c-1}, k>0, \quad (4)$$

$$\lambda p_{000}=\mu p_{001}, \quad (5)$$

$$p_{00c}(\lambda+2\mu c)=2\mu p_{0,1,c-1}, \quad (6)$$

$$p_{0c0}(\lambda+2\mu c)=\lambda p_{0,c-1,0}+\nu p_{1,c-1,0}. \quad (7)$$

Умова нормування

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{c}\sum_{j=0}^{c}p_{kij}=0,\ i+j\le c \quad (8)$$

Досить важко отримати аналітичний розв'язок системи (1) – (8). Одним із методів є обмеження ємності орбіти досить великою константою L. Тоді система (1) – (8) буде скінченною і ергодичною.

Чисельне розв'язання системи. Систему (1) – (8) з обмеженою орбітою можна розв'язати за допомогою стандартних процедур на комп'ютері. Однак, кількість пам'яті, необхідна для зберігання і оперування над великою кількістю елементів для великих L та c, є досить значною, хоча багато елементів головної матриці такої системи є нулями. Час, необхідний на обробку такої системи, теж доосить тривалий. Тому було запропоновано розв'язати систему (1) – (8) з обмеженою орбітою з використанням технології розріджених матриць.

Розрідженими називають матриці, переважна більшість елементів яких є нулями. Методи розріджених матриць потребують значно меншої пам'яті комп'ютера і часу на обчислення. Доведено, що час обробки елементів розрідженої матриці пропорційний кількості її ненульових елементів.

Нехай $B=\lim_{t\to\infty}P\{X(t)+Y(t)=c\}$ ймовірність того, що усі канали зайняті (так звана ймовірність блокування). Було отримано залежність ймовірності блокування B від ємності орбіти L (табл. 1). Коли $L\to\infty$ можна побачити, що B прямує до певного значення, тобто обчислена ймовірність блокування узгоджується з ймовірністю блокування початкової необмеженої системи (1) – (8).

Таблиця 1 – Залежність B від L ($c=10, \lambda=10, \mu=1, \nu=5$)

L	B
1	0,947783573
5	0,980924289
10	0,989509608
50	0,997672271
100	0,998818438
300	0,999602074
500	0,999760748
1000	0,999880187
2000	0,999880187

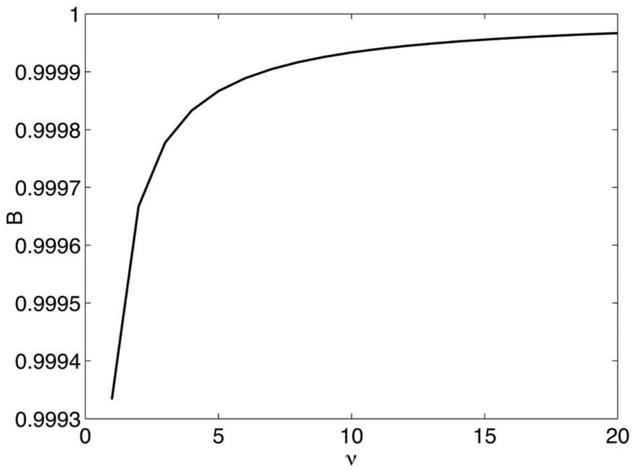

Рис. 3. Залежність B від ν ($c=5, \lambda=2, \mu=1$)

Висновки

У даній роботі було розглянуто багатоканальну систему черг з поверненнями з неекспоненціальними часами обслуговування. Було побудовано аналітичну модель системи черг типу з орбітою, заявки на циклі якої розподілені за законом Ерланга 2-го порядку. Запропоновано алгоритм чисельного розв'язання системи.

Список літератури

1. *Artalejo J.R., Gómez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 318 p.

2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. – London: Chapman and Hall, 1997. – 328 p.

3. *Koba E.V., Pustovaya S.V.* Call center as retrial queueing system. // J. of Automation and Inf. Sci. – 2007. – V.39 – P.37–47.

4. *Pustova S.V.* Investigation of call centers as retrial queuing systems. // Cybernetics and Systems Analysis. – 2010. –V.46. – P.494–499.

5. *Pustova S.V.* Dependence of performance indices of a call center on the distribution of calls' sojourn time in the orbit. // Cybernetics and Systems Analysis. – 2009. – V.45 – P.314–325.