УДК 519.6 : 519.21 : 511

Н.М. Глазунов, доктор физико-математичних наук,
(Национальний авиационный университет, Украина)

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассматриваются арифметические отображения, определяемые ими числовые последовательности и их моделирование. По паре арифметических отображений, конечному разбиению области значения арифметических отображений, реализуется моделирование определяемой ими числовой последовательности, и её последующее кодирование. Исследуются теоретические основы моделирования и кодирования.

Введение. Работа развивает подход, предложенный в [1,2,5] и реализуемый в [2,3,5], содержит краткий обзор теории арифметических отображений алгебраических кривых и накрытий, представляет класс арифметических отображений Клостермана-Хассе и их моделирование.

В книге [1] представлены и исследованы функции, определенные на целых числах, на классах вычетов по простым модулям со значениями в единичном интервале, а также рассмотрены некоторые вопросы кодирования числовых последовательностей бесконечными в одну сторону последовательностями.

Дадим краткий обзор современных результатов. По необходимости, мы приводим в нашем кратком обзоре только фамилии авторов, отсылая за более подробными ссылками на работы этих авторов и обзорами работ этих авторов к реферативному журналу Zentralblatt MATH, который доступен на сайте http://www.zentralblatt-math.org/MATH/.

Начнем с β-преобразований и преобразований Бейкера: для единичного интервала $[0,1]$, $\beta > 1$ и $x \in [0,1]$ пусть

$$T_\beta(x) = \beta x \mod 1,$$

есть β-преобразование и

$$d_\beta(x) = (x_i)_{i\geq 1}, x_i = \left[\beta T_\beta^{i-1}(x)\right],$$

соответствующее β-расширение. Символьная динамика β-преобразования была исследована А. Реньи (A. Rénei), который ввел это преобразование и доказал его эргодичность, а также В. Перри (W. Perry), который описал возможные последовательности, которые могут быть β-разложениями. Ключевая роль величины $d_\beta(1)$ отмечена Ф. Бланшаром (F. Blanchard). Дж. Александер (J. Alexander), Дж. Йорк (J. Yorke) а также С. Бозе (C. Bose) исследовали, соответственно, толстые преобразование Бейкера (fat baker's transformations) и обобщенные преобразование Бейкера (generalized baker's transformations). Натуральные (natural) расширения β-преобразований были охарактеризованы К. Дажани (K. Dajani), С. Кракампом (C. Kraaikamp) и Б. Соломяк (B. Solomyak). В статье Дж. Брауна (G. Brown) и К. Йина (Q. Yin) эти авторы изучают множество $\mathcal{S}$ всех таких β, определенных на просто связных подмножествах единичного квадрата, и с инвариантной мерой, являющейся константно кратной 2-мерной мере Лебега на $[0,1]^2$, для которых натуральное расширение T_β может быть представлено посредством отображения

$$\mathcal{T}_\beta(x,y) = \left(T_\beta x,\ \frac{[\beta x] + y}{\beta}\right).$$

В статье К. Дуйонга (Kwon, Doyong) исследуются достаточные условия для существования таких β-преобразований, для которых их натуральные расширения могут быть представлены как обобщенные преобразования Бейкера. К. Дуйонг характеризует такие β и изучает их свойства.

Ниже мы строим отображения в квадрат [0, π]×[0, π], моделируем и кодируем их продолжающимися (в том числе и бесконечными) в обе стороны последовательностями. Определяются отображения, которые мы называем отображениями Клостермана-Хассе (КХ). Отображения строятся на основе сумм Клостермана, соответствующих накрытиям Артина-

Шрайера, и кубических кривых. Мы определяем арифметическое отображения Клостермана-Хассе. Определяется и исследуется целочисленное кодирование отображений КХ на основе прямого произведения конечных равномощных разбиений интервала [0, π], и интерпретация этого кодирования точками единичного квадрата.

Напомним определения арифметического отображения на примере кубических кривых и накрытий Артина-Шрайера, с которыми связаны суммы Клостермана (библиографию и подробности см. в [5]).

Замечание. Пусть C есть плоская кубическая алгебраическая кривая вида $y^2 = f(x)$, $f(x) = x^3 + cx + d$ с целыми рациональными коэффициентами. В зависимости от дискриминанта кубического многочлена в правой части уравнения, кривая является особой, если дискриминант равен нулю, и не особой в противном случае. В последнем случае кривая является эллиптической.

Арифметическое отображение Клостермана-Хассе.

Пусть *Spec* $\boldsymbol{Z}$ - аффинная схема над кольцом целых чисел $\boldsymbol{Z}$, d_1 - множество точек спектра (соответствующих простым p), в которых $c, d \equiv 0 \ (mod\, p)$, $Sp = Spec\, \boldsymbol{Z} \setminus d_1$.

Компонента Хассе. Если C есть эллиптическая кривая E над $\boldsymbol{Z}$, то вне конечного множества простых, являющихся делителями дискриминанта, кривая E имеет хорошую редукцию в поле $\boldsymbol{F_p}$. Число точек $\#E(\boldsymbol{F_p}) = \#E_p$ кривой E при локализации по $mod\ p$ выражается формулой $\#\mathrm{E_p} = 1 + p - a_p$, где $a_p = 2\sqrt{p}\cdot cos\varphi_p$, а сама кривая E рассматривается как проективная. Если локализация C в поле $\boldsymbol{F_p}$ не есть эллиптическая кривая, то значение a_p равно 1, -1 или 0 и легко вычисляется. В обоих случаях вычисляем: $\varphi_p = \arccos\left(\frac{a_p}{2\sqrt{p}}\right)$ и приводим его к интервалу [0, π]. Углы φ_p называют углами эндоморфизма Фробениуса. Моделируется последовательность, порождаемая углами φ_p, где p пробегает последовательные простые числа. Кодирование последовательности описано ниже.

Компонента Клостермана. Пусть cd не сравнимо с нулем по $mod\ p$,

$T_p(c,d) = \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\left(cx+\frac{d}{x}\right)}{p}}$ есть сумма Клостермана. Согласно известному результату А. Вейля, $T_p(c,d) = 2\sqrt{p}\ \cos\theta_p(c,d)$. Последовательно вычисляем T_p, $\cos\theta_p$, θ_p и приводим θ_p к интервалу [0, π]. Моделируются последовательности T_p, $\cos\theta_p$, θ_p , где p пробегает последовательные простые числа. Экспериментальное исследование распределения углов сумм Клостермана в арифметическом случае представлено в работе [3,5].

Отображение Клостермана-Хассе. Арифметическое отображение КХ определяется на произведении схем $Sp{\times}Sp$ со значениями в $\Pi = [0,\pi]\times[0,\pi]$ и имеет вид

$$hk(c,d) = (\varphi_p(c,\ d),\ \theta_p(c,\ d)).$$

Так как Sp не содержит, по построению, простых делителей cd , отображение $hk(c,d)$ определено во всех точках. В проведенном экспериментальном исследовании [3,5] с суммой Клостермана $T_p = T_p(1,1)$ схема Sp совпадает с *Spec* $\boldsymbol{Z}$.

Кодирование. Пусть $\Re_1$ и $\Re_2$ есть два конечных разбиения одинаковой мощности d интервала $[0, \pi]$. Будем называть $\Re_1$ горизонтальным, а $\Re_2$ вертикальным разбиениями интервала $[0, \pi]$, а саму пару разбиений ($\Re_1$, $\Re_2$) p-парой. Обозначим элементы разбиения целыми числами $0,1, \ldots, d-1$. Арифметическое отображение КХ кодируется бесконечной последовательностью $\ldots b_2b_1b_0.a_1a_2a_3\ldots$. Значение этой последовательности может быть интерпретировано как вещественное число (x, y) из единичного квадрата, если известным способом полагать, что $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i / d_i$ (соответственно, $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_{i-1} / d_i$) есть d-ичное разложение x (соответственно, y).

Замечание. Числа $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i / d_i$ (соответственно, $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_{i-1} / d_i$) естественно назвать числами Клостермана (соответственно Хассе) и поставить вопрос: каковы арифметические свойства этих чисел?

Двусторонний сдвиг. Рассмотрим арифметическое отображение КХ и заданную p-пару. Отображению $hk(c,d)$ и его кодированию посредством заданной p-пары соответствует двусторонний сдвиг

$$\sigma(\ldots b_2b_1b_0.a_1a_2a_3\ldots) = \ldots b_2b_1b_0a_1 .a_2a_3\ldots,$$

где $a_1a_2a_3\ldots$ соответственно $b_0b_1b_2\ldots$ определены выше.

Моделирование. Проведенное компьютерное моделирование для последовательных простых чисел в интервале порядка [2,20000] и обработка результатов моделирования позволяют сделать заключение, что возможной плотностью распределения углов сумм Клостермана, является плотность распределения Сато-Тэйта, то есть что углы (гипотетически) распределены на интервале $[0, \pi]$ с плотностью $(2/\pi)\sin^2 t$.

Выводы

Арифметическое моделирование числовых последовательностей представляет активно развивающуюся область исследований. Моделирование демонстрирует схожий характер поведения функций распределения на интервале $[0, \pi]$ как углов эндоморфизма Фробениуса, так и углов сумм Клостермана. Построение новых арифметических отображений представляет как теоретический интерес, так и прикладное значение, в частности, для целей кодирования и передачи информации.

Список литературы

1. *Постников А.Г.* Избранные труды. М.: Физматлит, 2005. – С. 190-266.

2. *Glazunov N.M.* Dynamics, Coding And Entropies // Proceedings Fourth World Congress “AVIATION IN THE XXI-st CENTURY”, NAU, Kiev, 2010. – Vol. 1: “Safety in Aviation and Space Technologies.” – P.18.39-18.42.

3. *Глазунов Н.М.* Методы обоснования арифметических гипотез и компьютерная алгебра. Программирование , №3. - 2006. – С.10-16.

4. *Глазунов Н.М., Постникова Л.П., Шор Н.З.* Арифметическое моделирование случайных процессов и эргодическая теория // Кибернетика и системный анализ. N 4. – 2004. - С.73-86.

5. *Глазунов Н.М.* О пространствах модулей, равнораспределенности, оценках и рациональных точках алгебраических кривых // Укр. мат. журнал. - 2001. т.53.- № 9.- С.1174-1183.