УДК 519.85:510.57

М.М. Лопатюк, кандидат технічних наук
(Київська державна академія водного транспорту
ім. гетьмана П.Конашевича-Сагайдачного, Україна)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КРИЛА КІНЦЕВОГО РОЗМАХУ З ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙН–ФУНКЦІЙ

Представлені методика і алгоритми розв'язку задач обтікання аеродинамічного профілю, циркуляції вздовж крила кінцевого розмаху, інтегро-диференціальних рівнянь задач гідроаеромеханіки на базі єдиного чисельного метода. Приділена увага однорідності математичної моделі і простоті її включення до більш складного системного комплексу задач прикладної гідроаеромеханіки.

Розглянемо дискретну модель крила, яка являє собою впорядкований набір поперечних і поздовжніх дискретних кривих, що описують поверхню крила. Для апроксимації вибрана кубічна сплайн-функція, яка є оптимальною з точки зору простоти і забезпечення потрібного для розрахунків другого порядку гладкості та мінімальної ймовірності появи точок перегину:

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} - M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j}, \qquad (1)$$

де x_j, $j = 1,...,n$ - координати вузлових точок;

$h_j = x_{j+1} - x_j$;

M_j - величини, пов'язані із згинальним моментом в вузлових точках (їх називають для скорочення «моментами»).

Використовуємо осереднений параметр [1, 3]

$$\frac{t_j}{t_N}(N-1), \quad j = 1,...,N,$$

що відповідає точці на кожному з поперечних профілів, через які можна провести поздовжні лінії крила.

Для знаходження обтікання кожного з цих профілів потоком нестисливої і нев'язкої рідини розв'язуємо рівняння Лапласа відносно потенціалу течії:

$\Delta\varphi = 0$ з граничною умовою $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_L = 0$.

Розв'язок зводиться за [2] до інтегрального рівняння відносно швидкості $V(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^l V(\bar{t})\frac{\partial}{\partial n} arctg\frac{y-\eta}{x-\xi}d\bar{t} = V_\infty \frac{dx}{dn}$$

$$\frac{1}{2}V(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^l V(\bar{t})\frac{\partial}{\partial t} arctg\frac{y-\eta}{x-\xi}d\bar{t} = -V_\infty \frac{dx}{dt}, \qquad (2)$$

де $\bar{t}$ - параметр точки на контурі;

l - довжина профілю.

Представивши функцію $V(t)$ у вигляді кубічного сплайна, отримаємо визначений інтеграл з границями $[0,l]$ із формул (2) як суму визначених інтегралів на інтервалах $[t_{j-1}, t_j]$. Моменти $MV_j, \quad j=1,...,N$ знаходимо як розв'язок системи рівнянь.

Через приведену швидкість

$$g(t)=\frac{V(t)}{V_\infty}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

ці рівняння будуть мати вигляд

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^l g(\bar{t})\cdot\frac{\dot{x}(x-\xi)+\dot{y}(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}d\bar{t}=-\dot{y}\cos\alpha+\dot{x}\sin\alpha \tag{3}$$

$$g(t)-\frac{1}{\pi}\int_0^l g(\bar{t})\cdot\frac{\dot{y}(x-\xi)+\dot{x}(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}d\bar{t}=-2\dot{x}\cos\alpha-2\dot{y}\sin\alpha\,, \tag{4}$$

де α - кут атаки.

Для визначення швидкості $g(t)$ необхідно розв'язати одне з цих рівнянь, наприклад, рівняння (4). Припускаємо, приведена швидкість $g(t)$ є параметричною кубічною сплайн-функцією, тобто $g(t)=S_g(t)$ або у відповідності з [1]

$$S_g(t)=MG_{j-1}\frac{(t_{j-1}-t)^3}{6h}+MG_j\frac{(t-t_{j-1})^3}{6h}+$$
$$+\left(g_{j-1,j-1}-\frac{MG_{j-1}h^2}{6}\right)\frac{(t_j-t)}{h}+\left(g_{jj}-\frac{MG_jh^2}{6}\right)\frac{(t-t_{j-1})}{h},\quad j=1,\ldots,N\,, \tag{5}$$

де MG_j - моменти сплайна $S_g(t)$ в вузлових точках,

g_{jj} - значення приведеної швидкості $g(t)$ в вузлових точках, які необхідно визначити.

Позначимо

$$F(t)=\pi\left(-2\dot{x}\cos\alpha-2\dot{y}\sin\alpha\right),$$

$$K(\bar{t},t)=\frac{\dot{y}(x-\xi)-\dot{x}(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Тоді інтегральне рівняння (4) прийме вигляд

$$\pi\cdot g(t)-\int_0^l g(\bar{t})K(\bar{t},t)dt=\pi\cdot g(t)-\sum_{j=1}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}g_j(\bar{t})K_j(\bar{t},t)d\bar{t}=F(t)$$

В i-ій точці на профілі будемо мати

$$\pi\cdot g(t_i)-\sum_{j=1,j\neq k}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j=1}}g_j(\bar{t})K_j(\bar{t},t_i)d\bar{t}-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{t_k}^{t\ -\varepsilon}g_r(\bar{t})K_k(\bar{t},t_i)d\bar{t}+\int_{t_i+\varepsilon}^{t_{k=1}}g_k(\bar{t})K_k(\bar{t},t_i)dt\right)=F(t_i) \tag{6}$$

На k - ому інтервалі ядро $K(\bar{t},t)$ має особливість типу $\frac{0}{0}$. Переходячи до границі під знаком інтегралу, отримаємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{t_k}^{t-\varepsilon} g_r(\bar{t})K_k(\bar{t},t_i)d\bar{t}+\int_{t_i+\varepsilon}^{t_{k=1}} g_k(\bar{t})K_k(\bar{t},t_i)d\bar{t}\right)=\int_{t_k}^{t_{k+1}} g_k(\bar{t})\left\{\lim_{\bar{t}\to t_i} K_k(\bar{t},t_i)\right\}d\bar{t} \quad .$$

Позначивши цю границю через $\overline{K}(t_i)$, отримаємо

$$\overline{K}(t_s)=\lim_{\bar{t}\to t_i}\frac{\dot{y}(x-\xi)-\dot{x}(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{2\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)} \quad .$$

Тоді рівняння (6) в $N-2$ вузлових точках (за виключенням двох крайніх) дасть систему з $N-2$ рівнянь:

$$\pi\cdot g_{ii}-\sum_{j=1,\,j\neq k}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j=1}} g_j(\bar{t})K_j(\bar{t},t_i)d\bar{t}-\int_{t_k}^{t_{k+1}} g_k(\bar{t})\overline{K}(t_i)d\bar{t}=F(t_i),\qquad i=2,\ldots,N-1 \qquad . \qquad (7)$$

Дві граничні умови замкнуть систему. Для інтегрування можна використати квадратурні формули Ньютона – Котеса. В результаті отримаємо лінійну систему рівнянь, яку можна розв’язати за допомогою будь якого методу розв’язування систем лінійних рівнянь (наприклад, в MATHCAD).

Для знаходження швидкості вздовж крила необхідне значення циркуляції $\Gamma=\Gamma(z)$ по розмаху отримуємо із інтегро-диференціального рівняння Прандтля

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2}a_0(z)b(z)V_\infty\cdot(\alpha(z)-\frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{z-\zeta}), \qquad (8)$$

де $a_0(z)=\left(\frac{dC_y}{d\alpha}\right)_{c_y=0}$;

$b(z)$ - хорда відповідного крилового профілю;

$\alpha(z)$ - геометричний кут атаки;

C_y - коефіцієнт підйомної сили.

Представивши функцію $\Gamma=\Gamma(z)$ у вигляді кубічної сплайн–функції

$$\Gamma(z)=\frac{1}{6H}\Big[M\Gamma_j\cdot(z_{j+1}-z)^3+M\Gamma_{j+1}\cdot(z-z_j)^3+\left(6\Gamma_j-M\Gamma_j\cdot H_j^2\right)\cdot(z_{j+1}-z)+$$
$$+\left(6\Gamma_{j+1}-M\Gamma_{j+1}\cdot H_j^2\right)\cdot(z-z_j)\Big], \qquad (9)$$

зводимо задачу до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно моментів сплайн-функції $\Gamma = \Gamma(z)$ в вузлових точках.

Таким чином , отримаємо набір елементів – «моментів» відповідних сплайн–функцій

$$MX_j, MY_j, MV_j, M\Gamma_j,$$

які складають базу даних геометричної і аеро-, гідродинамічної моделей поверхні. За їх допомогою можна знаходити і інші необхідні параметри, наприклад, MP_j - моменти сплайн-функції тиску. Тобто маючи значення поперечних $t_k, k = 1,\ldots,N$ і поздовжніх $s_i, i = 1,\ldots,L$, зможемо знайти значення будь яке проміжне значення необхідної геометричної або аеро-, гідродинамічної характеристики.

Висновки

Можливо побудувати єдину цифрову параметричну математичну модель, яка в кожний поточний момент є актуальною і дозволяє визначити основні характеристики профілю (крила). Така модель може бути включеною в більш складний системний комплекс задач прикладної гідроаеромеханіки. Єдиною є інформаційна система символів – матриці коефіцієнтів відповідних сплайн-функцій. Просте і однорідне завдання вхідної інформації дозволяє розв'язувати всю сукупність задач одноманітно.

Список літератури

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн – функцій.-М.: Наука, 1980.-352с.
2. Павловец Г.А. Методы расчета обтекания сечений крыла идеальным несжимаемым потоком.- М.: Труды ЦАГИ.- Вып. 1344, 1971
3. Лопатюк М.М. Применение сплайн – функций для решения задач обтекания крыловых профилей и поверхностей. Сб. тезисов IV НТК молодых ученых, Новосибирск, 1979