УДК 629.735.051

В.В. Митюков
(Ульяновское высшее авиационное училище гражданской авиации (институт), Россия)

СОГЛАСОВАНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЕТА С АПРИОРНО ЗАДАННЫМИ СВЯЗЯМИ МЕЖДУ НИМИ

Предложен подход к построению алгоритмов уточнения измеренных данных, исходящий из геометрической интерпретации заранее заданных связей (уравнений) между измеряемыми переменными. Приведен конкретный пример связей, присутствующих в модели полета.

Измеряемая информация в задачах моделирования полета представляется в виде числовых рядов в массивах данных, записанных с некоторым шагом дискретизации по времени. Между измеряемыми переменными (числовыми рядами) часто существует априорная избыточность в виде заранее заданных связей между ними (уравнений). Эта избыточность может быть использована для уточнения и корректировки измеренных данных, как указывается в работе [1]. Алгоритмы такого согласования данных рассматриваются в ней только для некоторых частных случаев. В представленной работе обосновывается более общий подход, основанный на геометрических представлениях.

Чаще всего связи между рядами переменных представлены в виде алгебраических и дифференциальных уравнений. Предлагаемый подход к уточнению измеренных данных, можно проиллюстрировать на модельном примере дифференциальной связи, поскольку восприятие геометрических объектов возможно в пространстве не выше трехмерного. Геометрически, общим решением обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка является семейство функций одной переменной. Из этого семейства можно выделить одну из функций $y(t)$ (частное решение), которое определяется как исходящее из некоторой начальной точки $\{t_0, y_0\}$ (задача Коши), или как удовлетворяющее значениям y_i при различных значениях t_i , чаще концевых (краевая задача).

Пусть, исходя от обратного, общее решение ОДУ заранее известно и представляет собой однопараметрическое семейство парабол:

$$y = (t - c)^2. \quad \text{отсюда} \quad y' = 2\cdot(t - c) \tag{1}$$

После преобразования соотношений (1) с целью исключения параметра (c) получается соответствующее дифференциальное уравнение:

$$(y')^2 - 4\cdot y = 0 \tag{2}$$

Геометрическое многообразие, составляющее область определения уравнения (2), после введения дополнительной переменной ($p = y'$) будет представлять собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве с координатами t, y, p. В первую очередь результаты измерений должны принадлежать этой поверхности, но этого еще недостаточно.

Во вторую очередь измеренные значения должны располагаться вдоль одной из линий семейства кривых линий, составляющих эту поверхность и имеющих проекции на координатные плоскости вида (1), что равносильно выполнению функционального равенства $p(t) = y'(t)$ при надлежащем приближении $y'(t)$ на некотором интервале переменной t.

На третьем этапе измеренные данные должны совмещаться с точками пересечения полученной линии с плоскостями, ортогональными оси координат (t) и чередующимися с нужным шагом дискретизации. В итоге, применительно к рассматриваемому примеру, измеренные данные в каждой точке (t_k) должны удовлетворять системе двух уравнений:

$$\begin{cases} p_k^2 - 4y_k = 0 & (\text{в пределах плоскости } t_k \ y \ p) \\ p_k - y'_k = 0 & (\text{в направлении оси } t) \end{cases} \tag{3}$$

В более общем случае, рассматриваются вектор–функции $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{p}(t)$, для которых требуется найти приближение – вектор–функцию $\mathbf{f}(t)$.

Предложенное направление разработки алгоритмов согласования измеренных данных, прежде всего является задачей оптимизации, имеющей ряд следующих общих свойств:

- единственная *целевая функция*, значение которой должно быть сделано оптимальным (максимальным, минимальным или равным конкретному значению).
- набор *изменяемых переменных* решаемой задачи. Поиск решения заключается в подборе значений этих переменных, дающих оптимальное значение целевой функции.
- кроме того, может быть задано некоторое количество *ограничений* – условий или соотношений (обычно в виде равенств или неравенств), в пределах которых должно производиться изменение переменных.

В качестве целевой функции могут служить следующие критерии близости искомой вектор–функции $\mathbf{f}(t)$ к точному решению $\mathbf{y}(t)$, используемые в вычислительной практике:

- метод *коллокаций*, состоящий в точном выполнении равенства нулю невязки векторов $\frac{d\mathbf{f}_i}{dt}$ и $\mathbf{p}_\mathrm{i}$ в заданных точках t_i $(i = 0, 1, .. m)$.
- метод *наименьших квадратов* вытекающий из условия минимума суммы квадратов всех невязок $\mathbf{r}_i = \frac{d\mathbf{f}_i}{dt} - \mathbf{p}_i$ на заданной системе точек t_i $(i = 0, 1, .. m)$,

  что сводится к минимуму суммы скалярных произведений $(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)$
- метод *Галеркина*, основанный на требовании ортогональности базисных вектор–функций $\boldsymbol{\varphi}_j(t)$ (размерности m) к невязке $\mathbf{r}(t)$ на некотором интервале [0, T], которое выражается в виде:

$$\int_0^\mathrm{T} \mathbf{r}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_j(t) \cdot dt = 0 \qquad \text{для} \quad j = 1, 2, \dots n$$

Набор изменяемых переменных будет состоять из совокупности компонентов векторов $\mathbf{f}_\mathrm{i}$ и $\mathbf{p}_\mathrm{i}$. на некоторой системе точек t_i $(i = 0, 1, .. m)$.

Подбор этих переменных должен производиться в пределах заранее заданных ограничений – связей между изменяемыми переменными.

Следует добавить, что в офисной программе “Excel” инструментом для решения задач оптимизации служит подключаемая надстройка “Поиск решения”, в которой реализованы основные методы и алгоритмы оптимизации. От пользователя требуется умение с помощью серии диалоговых окон правильно сформулировать условия задачи. Эта надстройка позволяет варьировать одновременно до 200 изменяемых переменных.

При традиционном математическом моделировании полета предполагается, что воздушное судно (ВС) представляет собой твердое тело (недеформируемая конструкция). Движение такой системы точек сводится [2] к поступательному движению их центра масс и вращательному движению вокруг центра масс недеформируемого тела. Вид уравнений движения ВС в общем случае зависит от выбора системы отсчета.

Системы координат (СК), связанные с поверхностью Земли и с воздушным судном, регламентируются ГОСТ 20058-80 [3]. В качестве инерциальной (неускоренной) системы отсчета обычно выбирается система координат связанная с поверхностью Земли, которой в ГОСТ 20058-80 будет соответствовать нормальная земная СК (*Oo Xg Yg Zg*). Такая система отсчета участвует в суточном вращении Земли вокруг своей оси и в годовом вращении вокруг Солнца. Однако порядок ускорений (перегрузок), обусловленных влиянием этих вращений, весьма мал, даже для сверхзвукового ВС.

Уравнения перемещения центра масс под воздействием суммарного вектора внешних сил **R** и вращения вокруг центра масс под воздействием суммарного момента **M** от этих внешних сил в такой системе координат принимают наиболее простой вид [2]:

$$m \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{R} \qquad\qquad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \qquad\qquad (4)$$

где m – общая масса системы материальных точек (твердого тела)

V – вектор скорости центра масс твердого тела

L – вектор момента количества движения твердого тела (**L** = I·**ω**)

I – тензор инерции твердого тела

ω – вектор скорости вращения твердого тела

В качестве проекционной (уже неинерциальной), традиционно выбирается связанная СК (*O X Y Z*), неподвижно фиксированная относительно движущегося тела. В этом случае отсутствует движение точек твердого тела относительно такой СК (присутствует только переносное движение СК), а входящий в выражение для вектора **L** = I·**ω** тензор инерции (I) не зависит от положения ВС (если не учитывать влияние расходования топлива).

В результате изменения положения векторов **V** и **ω** относительно связанной СК при ее вращательном движении, динамические уравнения (4) примут следующий вид [1], [2]:

$$m\cdot\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}+\mathbf{щ}\times\mathbf{V}\right)=\mathbf{R} \qquad \frac{d\mathbf{L}}{dt}+\mathbf{щ}\times\mathbf{L}=\mathbf{M} \qquad (5)$$

Для однозначного определения положения ВС, систему динамических уравнений (5) необходимо дополнить замыкающими кинематическими уравнениями, связывающими параметры движения ВС (или связанной СК) относительно инерциальной СК:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{V} \qquad \frac{d\,\mathbf{ц}}{dt}=\mathbf{щ} \qquad (6)$$

где **r** – вектор положения центра масс ВС относительно инерциальной СК.

φ – вектор угловой ориентации ВС (углы Эйлера).

Представления правых частей динамических уравнений (их сложность и полнота), включающих в себя как минимум силы и моменты от двигателя и аэродинамического воздействия, зависят от характера решаемой задачи и могут дополняться:

- уравнениями, задающими управляющие воздействия
- уравнениями, моделирующими динамику двигателей
- уравнениями, описывающими состояние внешней среды
- уравнениями, воспроизводящими взаимодействие колес шасси с ВПП и др.

В общем случае построение адекватной динамической модели ВС – чрезвычайно трудная задача с изначально заложенной неопределенностью. В отличие от динамических, кинематические уравнения (6) являются совершенно точными. Поэтому в первую очередь следует согласовывать результаты измерений параметров полета с существующими кинематическими связями.

Проекциями векторных компонентов уравнений (5) и (6) на оси связанной СК являются следующие 12 переменных, регламентированные стандартом ГОСТ 20058-80 :

V_x, V_y, V_z – проекции вектора $\mathbf{V}_k$ земной скорости ц. м. ВС на оси связанной СК;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора **ω** скорости вращения ВС на оси связанной СК;

L, H, Z – проекции вектора **r** положения ВС на оси нормальной земной СК;

ψ, ϑ, γ – проекции вектора **φ** угловой ориентации ВС на оси промежуточных СК (в общем случае не ортогональных между собой).

Как видно из описаний этих 12 переменных, они определены в различных СК, и их требуется привести к проекционной (связанной) СК. Использование методики, изложенной в [5], приводит к следующим кинематическим соотношениям в матричной форме для этих переменных и их производных:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma)\\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 0\\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dL/dt\\ dH/dt\\ dZ/dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d\gamma/dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\vartheta/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 0 \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ d\psi/dt \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Проделав необходимые выкладки, полученные уравнения можно привести к более привычному виду [4], в котором в левой части будут находиться только 6 входящих в эти уравнения производных. Это требуется в случае их интегрирования численными методами.

$$\begin{pmatrix} dL/dt \\ dH/dt \\ dZ/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \qquad (7)$$

$$\begin{pmatrix} d\psi/dt \\ d\vartheta/dt \\ d\gamma/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos\gamma}{\cos\vartheta} & -\dfrac{\sin\gamma}{\cos\vartheta} \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \\ 1 & -\dfrac{\sin\vartheta\cos\gamma}{\cos\vartheta} & \dfrac{\sin\vartheta\sin\gamma}{\cos\vartheta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Набор изменяемых переменных будет состоять из 12–ти проекций вектор–функции **f**(t), представляющей собой приближение к решению системы (5) и (6).

f = (V_x, V_y, V_z, ω_x, ω_y, ω_z, L, H, Z, ψ, ϑ, γ),

и 12–ти проекций вектора дополнительных переменных вектор–функции **p**(t):

p = ($V_x', V_y', V_z', \omega_x', \omega_y', \omega_z', L', H', Z', \psi', \vartheta', \gamma'$)

которые в первую очередь должны находиться в подмножестве, определяемом наложением шести кинематических связей (7) и (8). Если значения некоторых параметров находятся за его пределами, то перемещение таких точек в сторону этого подмножества, несомненно приблизит их значения к истинным, при условии расположения этих точек вдоль одной из кривых линий, определяемых решением системы уравнений (5) и (6).

Выводы:

Задача согласования измеренных данных с имеющимися зависимостями между ними рассматривается с позиций, основанных на геометрических представлениях. Предложенное направление для разработки алгоритмов и программ продемонстрировано в приложении к задаче повышения точности оценивания измеренных координат и параметров движения ВС (или другого твердого тела) и может найти применение в следующих задачах:

- В задачах инерциальной навигации для уточнения вычисляемых параметров движения объекта в режиме реального времени.
- При расследованиях летных происшествий для восстановления и уточнения записанных параметров движения ВС и предполагаемой траектории.

Список литературы:

1. *Касьянов В.А.* Моделирование полета: Монография. – К.: НАУ, 2004. – 400 с.

2. *Халфман Р.* Динамика: Пер.с англ. –М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литер., 1972. – 568 с.

3. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. – М.: Изд-во стандартов, 1981. – 53 с.

4. *Горбатенко С.А.*, и др. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. Инженерный справочник 1971. – 352 с.

5. *Митюков В.В., Извольский И.В.* Методика преобразования координат при моделировании движения твердого тела. // Научно-технический журнал «Автоматизация процессов управления». – Ульяновск : НПО «Марс», 2010. – № 4 (22). – с. 16-21.