УДК 517.95:519.86

*Я.В. Крисак, доцент НАУ (Національний авіаційний університет, Україна),*
*О.В. Сороцька, В.А. Стоян, д.ф.-м.н. (КНУ ім. Тараса Шевченка, Україна)*

# ДО ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНО ВИЗНАЧЕНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЛІНІЙНИХ ТА КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

*Розв'язується задача побудови інтегральної моделі дискретно спостережуваного просторово розподіленого динамічного процесу*

Дослідження сучасних некласично визначених динамічних процесів часто супроводжується проблемами побудови адекватної математичної моделі процесу та проблемами коректної постановки початково-крайових задач для них.

Проблеми дослідження динаміки диференціально описаних динамічних процесів за умови неповноти інформації про їх початково-крайовий стан детально викладені в [1,2], де запропоновані методики математичного моделювання функції стану процесу, яка, точно задовольняючи диференціальній моделі процесу, за середньоквадратичним критерієм узгоджується з дискретно та неперевно визначеними початково-крайовими спостереженнями за ним. За цим же критерієм розв'язуються і задачі керування динамікою таких процесів. Базовим для розв'язання сформульованих в [1,2] математичних задач є інтегральний еквівалент лінійної диференціальної моделі процесу.

Зважаючи на деякі проблеми побудови таких інтегральних еквівалентів нижче пропонується досить загальний підхід до побудови його дискретного аналогу. Зауважимо, що цей підхід не вимагає наявності диференціальної моделі динаміки процесу, а ґрунтується на системі спостережень за ним.

1. Розглянемо лінійний динамічний процес, залежність вектор-функції $y(t)\in R^p$ стану якого від розподілених в часі зовнішньо-динамічних збурень $x(t)\in R^m$ визначається системою лінійних диференціальних рівнянь

$$L(\partial_t)\,y(t)=x(t), \tag{1}$$

в якій $L(\partial_t)$ – матричний ( розмірності $m\times p$ ) диференціальний оператор. Не зупиняючись на постановках початково-крайових задач та задач керування для системи (1), зауважимо, що всі вони розв'язуються в [1,2] після заміни диференціальної моделі (1) наступною інтегральною моделлю

$$y(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(t-t')x(t')\,dt'. \tag{2}$$

Деякі варіанти побудови передаточної функції $G(t-t')$ для відомих операторів $L(\partial_t)$ викладені в [2,4].

Зупинимося на побудові матричної функції $G(t-t')$ для випадку, коли математична модель (1) досліджуваного процесу не відома, однак є серія спостережень

$$\vec{x}^{(1)},\dots,\vec{x}^{(n)};\quad \vec{y}^{(1)},\dots,\vec{y}^{(n)} \tag{3}$$

за вхідними та вихідними векторами

$$\vec{x}=\mathrm{co}\,l(x(t_m),\,m=\overline{1,M}),$$

$$\vec{y}=\mathrm{co}\,l(y(t_l),\,l=\overline{1,L})$$

системи (2), яку в цьому випадку запишемо співвідношенням

$$\vec{y}=A\vec{x}. \tag{4}$$

Перетворюючу матрицю $A=\left[G(t_l-t_m)\right]_{\ell,m=1}^{\ell=L;m=M}$ – дискретний аналог передаточної функції $G(t-t')$ – побудуємо так, щоб

$$A\vec{x}^{(i)} = \vec{y}^{(i)} \quad \forall i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

В основу розв'язання задачі (5) покладемо наукові результати роботи [5], розвинені та узагальнені в [3].

2. Ґрунтуючись на математичних результатах псевдоінверсної алгебри легко показати [3], що система (5) матиме розв'язок, якщо

$$y_{(i)}^T Z(X) y_{(i)} = 0 \quad \forall i = \overline{1,\ Lp}, \tag{6}$$

де $Z(X) = I - X^+ X$,

$$X = (\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}) = col(x_{(i)}^T;\, i = \overline{1,\ Mm}),$$

$$col(y_{(i)}^T,\, i = \overline{1,\ Lp}) = (\vec{y}^{(1)}, \ldots, \vec{y}^{(n)}) = Y.$$

При цьому

$$A = YX^+ + VZ(X^T) \quad \forall V \in R^{Lp \times Mm} \quad . \tag{7}$$

Розв'язок (7) буде однозначним $(V \equiv 0)$, якщо $\det XX^T > 0$.

3. Для випадку, коли

$$\varepsilon_s^2 = y_{(s)}^T Z(X) y_{(s)} > 0 \tag{8}$$

для деякого $s \in \{1, \ldots, Lp\}$, $a_{(s)}^T$ - рядок матриці

$$A = col\left(a_{(i)}^T,\, i = \overline{1, Lp}\right)$$

моделі (5) не може бути точно побудований на спостереженнях (3). Рядок цей може бути, однак, побудований після нелінійного перетворення $x_{(i_*)}^T$ - рядка $(i_* \in \{\overline{1, Mm}\})$ матриці вхідних спостережень $X$. Номер $i_*$ - рядка може бути вибраний з умови

$$x_{(i_*)}^T X^T X x_{(i_*)} \neq 1 \tag{9}$$

лінійної залежності цього рядка від інших рядків матриці $X$. Через систему векторів $x_{(i_*)}^{k\otimes}$ $(k = \overline{1, k_*})$, для яких

$$x_{(i_*)}^{j\otimes} = \underbrace{x_{(i_*)} \ldots x_{(i_*)}}_{j-\text{раз}} \quad \left(j = \overline{2,\ k_*}\right), \tag{10}$$

$$\left\| Z\left(X\right) x_{(x_*)}^{j\otimes} \right\|^2 > 0 \quad \left(j = \overline{2,\ k_*}\right), \tag{11}$$

$$rangZ\left(X\right)(x_{(i_*)}^{2\otimes}, \ldots, x_{(i_*)}^{k_*\otimes}, x_{(i_*)}^{(k_*+1)\otimes}) = k_* - 1, \tag{12}$$

можна спробувати визначити $a_{(s)}^T$ - рядок матриці $A$.

При цьому

$$a_{(s)}^T = y_{(s)}^T \tilde{X}^+ + v^T Z\left(\tilde{X}^T\right) \tag{13}$$

за довільного $Mm$ - вимірного вектора $v$, тотожно рівного нулю, якщо

$$\det \tilde{X}\tilde{X}^T > 0$$

та

$$\tilde{X} = (x_{(1)}, \ldots, x_{(i_*-1)}, \sum_{j=2}^{k_*} c_j x_{(i_*)}^{j_\otimes}, x_{(i_*+1)}, \ldots, x_{(Mm)})^T. \tag{14}$$

Необхідною та достатньою умовою існування визначеного згідно (13) $a_{(s)}^T$ - рядка матриці $A$ є умова існування розв'язку системи

$$\sum_{j=2}^{k_*} c_j x_{(i_*)}^{j_\otimes} = Z(X) y_{(s)},$$

яка визначається співвідношенням

$$\left\| Z(X_{i_*}^T) Z(X) y_{(s)} \right\|^2 = 0 \tag{15}$$

при $X_{i_*} = (x_{(i_x)}^{2\otimes}, ..., x_{(i_*)}^{k_*\otimes})$.

Рядки ж $a_{(i)}^T \ (i = \overline{1, Lp}, i \neq s)$, які складають матрицю

$$\overline{A} = (a_{(1)}, ..., a_{(s-1)}, a_{(s+1)}, ..., a_{(Lp)})^T,$$

визначатимуться через матрицю $X$ співвідношенням

$$\overline{A} = \overline{Y} X^+ + VZ(X^T), \tag{16}$$

у якому $\overline{Y}$ – матриця $Y$ без $s$-го рядка, а $V$ – довільна $((Lp-1)\times Mm)$- вимірна матриця, тотожно рівна нулю, якщо $\det XX^T > 0$.

Лінійна математична модель (4) в даному випадку заміниться квазілінійною моделлю

$$\overline{A}\vec{x} = \overline{y}, \tag{17}$$

$$a_{(s)}^T \tilde{x} = y_s, \tag{18}$$

в якій $\overline{y}$ - вектор $\vec{y}$ без $s$ - компоненти $y_s$, а $x = col(x_1, ..., x_{Mm})$,

$$\overline{x} = col(x_1, ..., x_{i_*-1}, \sum_{j=2}^{k_*} c_j x_{i_*}^j, x_{i_*+1}, ... x_{Mm}).$$

4. Зупинимося на випадку, коли визначені згідно (4) та (17), (18) математичні моделі розглядуваного процесу не можуть бути побудовані на спостереженнях (3) за ним. Це означає, що досліджуваний процес є нелінійним (умова (8)), однак немає $x_{(i_*)}^T$ - рядка матриці $X$ (умова (9)), який можна було б перетворити згідно (10), або ж такий $x_{(i_*)}^T$ - рядок є, але перетворення (10) не задовольняють умовам (11), (12), (15). У цьому випадку на спостереженнях (3) за процесом визначену співвідношеннями (17), (18) квазілінійну модель його точно побудувати не можна.

Для побудови математичної моделі, яка б найкраще за середньоквадратичним критерієм узгоджувалася з матрицями $X$ та $Y$ спостережень за процесом будемо виходити з нелінійно за $x_{(i_0)}^T$ - рядком перетвореної матриці

$$\tilde{X}_{i_0} = (x_{(1)}, ..., x_{(i_0-1)}, \sum_{j=1}^{k_0} c_j(i) x_{(i_0)}^{j\otimes}, x_{(i_0+1)}, ..., x_{(m)})^T. \tag{19}$$

Номер $i_0$ вибраного для перетворень $x_{(i_0)}^T$ - рядка матриці $X$ та вектор $c(i) = col(c_1, ..., c_{k_0})$ коефіцієнтів $c_1, ..., c_{k_0}$ перетворення виберемо так, щоб

$$(i_0, c(i_0)) = \arg\min_i \min_{c(i)} \sum_{s=1}^{p} \varepsilon_s^2(i, c(i)), \tag{20}$$

де $k_0$ – розмірність простору ортогонального доповнення до лінійної оболонки $L(\tilde{X}_i)$, натягненої на вектор-рядки матриці $\tilde{X}_i$, $Pr_{\overline{L(\tilde{X}_i)}} y_{(s)}$ – проекція вектора $y_{(s)}$ на це ортогональне доповнення, а

$$\varepsilon_s^2(i, c(i)) = \left\| Pr_{\overline{L(\tilde{X}_i)}} y_{(s)} \right\|^2.$$

Для знаходження вектора $c(i) = \arg\min_{\xi \in R^{k_0}} \varepsilon_s^2(i, \xi(i))$ будемо виходити з того, що

$$Pr_{\overline{L(\tilde{X}_i)}} y_{(s)} = Z(\tilde{X}_i) y_{(s)},$$

при $$Z(X_i) = Z(\overline{X}) - \frac{Z(\overline{X}) \sum_{j=1}^{k_0} c_j x_{(i)}^{j\otimes} (\sum_{j=1}^{k_0} c_j x_{(i)}^{j\otimes})^T Z(\overline{X})}{\left\| Z(\overline{X}) \sum_{j=1}^{k_0} c_j x_{(i)}^{j\otimes} \right\|^2}, \quad Z(\overline{X}) = Z(X) + \frac{q_i q_i^T}{\|q_i\|^2} \tag{21}$$

(тут $q_i = X^+ e_i - i$-й стовпець матриці $X^+$).

Позначивши через

$$D_i = Z(\overline{X})(x_i^{1\otimes},...,x_i^{k_0\otimes}), \qquad (22)$$

проекційну матрицю (21) запишемо у вигляді

$$Z(\tilde{X}_i) = Z(\overline{X}) - \frac{D_i c(D_i c)^T}{\|D_i c\|^2}. \qquad (23)$$

Після чого з (20) маємо

$$c(i) = \arg\min_{\xi \in R^{k_0}} \frac{(y_s^T D_i \xi(i))^2}{\|D_i \xi(i)\|^2}. \qquad (24)$$

Розв'язком же (24) , буде $c(i) = D_i^+ y_{(s)} \quad (s \in \{\overline{1,p}\})$.

Останнє означає, що введений в (20) номер $i_0$ $x_{(i_0)}^T$ - рядка матриці $X$ визначається співвідношенням

$$i_0 = \arg\min_{i \in \{\overline{1,m}\}} \{y_{(s)}^T Z(\overline{X}) y_{(s)} - (y_{(s)}^T P_i P_i^+ y_{(s)})^2\}, \text{ де } P_i = D_i D_i^T.$$

Через перетворену згідно (19) матрицю $\tilde{X}_i$ співвідношенням

$$a_{(s)} = (\tilde{X}_{i_0}^T)^+ y_{(s)} + (I - P_{i_0}^+ P_{i_0}) v_{(s)}$$

(25)

при довільному $v_{(s)} \in R^m$ $(v_{(s)} \equiv 0$, якщо $\det P_{i_0} > 0)$ та $P_{i_0} = \tilde{X}_{i_0} \tilde{X}_{i_0}^T$ визначається $a_{(s)}^T$ - рядок $(s = \overline{1,p})$ матриці $A$. Точність такого визначення $a_{(s)}^T$ - рядка матриці $A$, яким вноситься нелінійність у початково лінійну модель процесу, встановлюється величиною

$$\min \left\| \tilde{X}_{i_0}^T a_{(s)} - y_{(s)} \right\|^2 = \left\| Z(\tilde{X}_{i_0}) y_{(s)} \right\|^2 = y_{(s)}^T (I - \tilde{X}_{i_0}^+ \tilde{X}_{i_0}) y_{(s)}.$$

Сама ж математична модель при цьому запишеться співвідношенням

$$A\tilde{x} = \vec{y}$$

при визначеному вище векторові $x$ та

$$\tilde{x} = col(x_1,...,x_{i_0-1}, \sum_{j=1}^{l_0} c_j(i_0) x_{i_0}^j, x_{i_0+1},....,x_m).$$

**Висновки.** Таким чином, для просторово розподіленого динамічного процесу, дискретно спостережуваного за станом та розподіленими зовнішньо-динамічними збуреннями, які його супроводжують, ідентифікується дискретний аналог ядра інтегральної математичної моделі процесу. Розглядаються випадки лінійної та квазілінійної моделі. Досліджуються умови точності та однозначності розв'язання задачі.

## Список літератури


1. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Т.* Математичне моделювання динаміки прямих та обернених задач динаміки системи з розподіленими параметрами. – К.: Наук. думка, 2001.– 361с.

2. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б.* Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. – К.: Видавництво «Сталь», 2009.–316с.

3. *Стоян В.А.* Моделювання та ідентифікація динаміки системи із розподіленими параметрами К.: ВПЦ «Київський Університет», 2008. – 201с.

4. *Гладкий А.В., Сергієнко І.В., Скопецький В.В., Гладка Ю.А.* Основи математичного моделювання в екології. – К.: НТУУ «КПІ», 2009.–240с.

*Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П.* Возмущение псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей// Проблемы управления и информатики. – 2001. – №4. – С. 6–22.