УДК 681.142 + 519.4

*В.К. Репета , канд. фіз.-мат. наук, доцент*
*(Національний авіаційний університет, Україна)*

# ПРО ЧИСЛОВІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

*Вивчені тригонометричні добутки спеціального вигляду. Встановлено умову розпаду цих добутків на множники із раціональними значеннями, що спирається на малу теорему Ферма та теорему Ейлера*

Розглянемо добутки вигляду $\cos\frac{\alpha_1\pi}{2n+1}\cos\frac{\alpha_2\pi}{2n+1}...\cos\frac{\alpha_k\pi}{2n+1}$ ($\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_k$ – натуральнікоефіцієнти, які попарно різні між собою і належать відрізку [1; $n$]). Насамперед нас цікавитимуть умови, за яких цей вираз є раціональним числом, точніше дорівнює $\frac{1}{2^k}$.

Розглядуваний матеріал тісно переплітається з елементами теорії чисел, зокрема з малою теоремою Ферма.

**Твердження 1.** Нехай $n$ – натуральне число, тоді

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}...\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}\ . \tag{1}$$

Доведення. Позначимо

$$C(n)=\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}...\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2n+1},$$

$$S(n)=\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}...\sin\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\sin\frac{n\pi}{2n+1}\ ,$$

помножимо і одночасно поділимо C($n$) на $2^n$ S($n$), після $n$ - кратного застосування формули $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ отримаємо

$$2^n C(n)=\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}...\sin\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}\sin\frac{2n\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}...\sin\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\ . \tag{2}$$

Кожному множнику $\sin\frac{\alpha_k\pi}{2n+1}$ у формулі (2) поставимо у відповідність число $\alpha_k$. У результаті знаменник дробу, тобто вираз S($n$), характеризуватиме множина $A_{зн}$ = {1, 2, 3, …, $n$ –1, $n$}, а чисельник — відповідно набір $A_{чис}$ = {2, 4, 6, …, 2$n$ –2, 2$n$}. Будь-яка перестановка елементів кожної множини означатиме незмінність розглядуваного тригонометричного виразу, оскільки самі множники при цьому не змінюються. Окрім цього, елемент $\alpha_k$ природно ототожнити з елементом $2n+1-\alpha_k$, адже, заміна $\alpha_k$ на $2n+1-\alpha_k$ означає застосування формули зведення $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ для $\alpha=\frac{\alpha_k\pi}{2n+1}$.

Покажемо, що права частина в (2) дорівнює 1. Для цього проаналізуємо набори $A_{зн}$ та $A_{чис}$. Замінивши кожен парний елемент $2k$ множини $A_{чис}$, що перевищує $n$, на відповідний непарний елемент $2n+1-2k$, дістанемо рівносильний набір $A_{чис}$ = {2, 4, 6, …, 3, 1}, який складається з тих самих елементів, що й множина $A_{зн}$, записаних лише в іншому порядку. Звідси випливає, що чисельник дробу складається з тих самих множників, що й знаменник. Отже, дріб дорівнює 1, а $C(n)=\frac{1}{2^n}$, що й завершує доведення.

**Приклад 1.** Нехай $n$ = 5, тоді (2) набуває вигляду

$$2^5 C(5) = \frac{\sin\frac{2\pi}{11}\sin\frac{4\pi}{11}\sin\frac{6\pi}{11}\sin\frac{8\pi}{11}\sin\frac{10\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}\sin\frac{3\pi}{11}\sin\frac{4\pi}{11}\sin\frac{5\pi}{11}}.$$

Знаменник та чисельник дробу у правій частині розглядуваної рівності. характеризують множини $A_{зн} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та $A_{чис} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ відповідно. Оскільки 11 – 10 = 1, 11– 8 = 3, то запишемо другу множину у вигляді $A_{чис} = \{2, 4, 5, 3, 1\}$.

Погляньмо тепер на табл.1, у яку занесено остачі $r$ від ділення степенів двійки на 11.

Таблиця 1

| **$k$** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$r = 2^k$ (mod11)** | **2** | **4** | **8** | **5** | **10** | **9** | **7** | **3** | **6** | **1** |
| **$r$ або $11 - r$** | **2** | **4** | **3** | **5** | **1** | **2** | **4** | **3** | **5** | **1** |

Далі таблицю можна не повторювати, оскільки остачі повторюються з періодом 10. Крім того помічаємо такі закономірності: 1) у середньому рядку кожне наступне число є остачею від ділення на 11 подвоєного попереднього числа; 2) для кожного числа середнього рядка існує рівно одне число, які у сумі дають 11. Такі числа ми вважаємо тотожними: якщо остача $r > 5$, замінимо її на $11 - r$. У результаті дістанемо нижній рядок, елементи якого повторюються з періодом 5 і є по суті перестановками множини $A_{зн}$ чи $A_{чис}$.

Встановимо відповідність між елементами множин $A_{зн}$ та $A_{чис}$ у вигляді табл. 2.

Таблиця 2

| **$A_{зн}$** | 1 | **2** | **4** | **3** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **$A_{чис}$** | **2** | **4** | **3** | **5** | 1 |

За даними таблиць сформуємо рівносильні цикли (рис. 1), які визначають ще два способи обчислення значення $C(5)$.

$1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 1$ $\qquad$ $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 1$

Рис. 1

Реалізацією другого циклу є такі перетворення

$$C(5) = \frac{\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{8\pi}{11}\cos\frac{16\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{8\pi}{11}\cos\frac{16\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{8\pi}{11}\cos\frac{16\pi}{11}}{4\sin\frac{\pi}{11}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{11}\cos\frac{8\pi}{11}\cos\frac{16\pi}{11}}{8\sin\frac{\pi}{11}} = \frac{\sin\frac{16\pi}{11}\cos\frac{16\pi}{11}}{16\sin\frac{\pi}{11}} = \frac{\sin\frac{2^5\pi}{11}}{32\sin\frac{\pi}{11}} = \frac{1}{32} \quad \mathbf{(3)}$$

Помітимо, що $2^5 + 1$ ділиться без остачі на просте число 11. Саме цей факт дає змогу застосувати формулу зведення $\sin\frac{2^5\pi}{11} = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{11}\right) = \sin\frac{\pi}{11}$ і в результаті підтвердити раціональність добутку $C(5)$. Звернемося тепер до малої теореми Ферма.

**Мала теорема Ферма**. *Якщо $p$ – просте число і $a$ – ціле число, що не кратне $p$, то $a^{p-1} - 1$ ділиться без остачі на $p$.*

Як частинний випадок при $a = 2$ (надалі обмежуватимемося саме таким випадком) справджується твердження: якщо $p$ – просте число ($p \neq 2$), то $2^{p-1} - 1$ ділиться без остачі на $p$. Це записують так: $2^{p-1} - 1 \equiv 0(\operatorname{mod} p)$ (запис $a \equiv b(\operatorname{mod} p)$ означає, що числа $a$ і $b$ при діленні на $p$ дають однакові остачі).

Нехай $2n + 1$ – просте число, тоді за малою теоремою Ферма $2^{2n} - 1 \equiv 0(\operatorname{mod}(2n + 1))$, або $\left(2^n - 1\right)\left(2^n + 1\right) \equiv 0(\operatorname{mod}(2n + 1))$. Оскільки $2n + 1$ – просте число, то або $2^n - 1 \equiv 0(\operatorname{mod}(2n + +1))$, або $2^n + 1 \equiv 0(\operatorname{mod}(2n + 1))$. У нашому випадку $2^{10} - 1 = 93 \cdot 11 \equiv 0(\operatorname{mod} 11)$, $\left(2^5 - 1\right)\left(2^5 + 1\right) \equiv 0(\operatorname{mod} 11)$, звідси $2^5 + 1 \equiv 0(\operatorname{mod} 11)$.

Із наведених міркувань по суті випливає

**Твердження 2.** Якщо $2n + 1$ – просте число, тоді

$$\left|\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2^{n-1}\pi}{2n+1}\right| = \frac{1}{2^n}. \qquad \textbf{(4)}$$

**Приклад 2**. Нехай $2n + 1 = 17$. У цьому разі зациклювання елементів при зміні $k$ від 1 до 8 відбувається двічі (див. рис.2).

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 1 \qquad\qquad 3 \to 6 \to 5 \to 7 \to 3$$

Рис. 2

Отже, тотожність (1) при $n = 8$ розпадається на дві тотожності:

$$\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{1}{16}, \quad \cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{6\pi}{17}\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{7\pi}{17} = \frac{1}{16}.$$

Між прикладами 1 та 2 є суттєва відмінність: вираз $C(8)$ допускає представлення у вигляді добутку двох виразів, кожен з яких набуває одного й того самого раціонального значення, тоді як виразу $C(5)$ це не властиво. Причиною відмінностей очевидно є властивості числа $2n + 1$. І 11, і 17 – прості числа, тобто числа однієї природи, проте за малою теоремою Ферма:

1) якщо $2n + 1 = 11$, то $2^{10} - 1 = \left(2^5 - 1\right)\left(2^5 + 1\right) \equiv 0(\operatorname{mod} 11)$, звідси $2^5 + 1 \equiv 0(\operatorname{mod} 11)$;

2) якщо $2n + 1 = 17$, тоді $2^{16} - 1 = \left(2^4 - 1\right)\left(2^4 + 1\right)\left(2^8 + 1\right) \equiv 0(\operatorname{mod} 17)$, звідси $2^4 + 1 \equiv 0(\operatorname{mod} 17)$.

Мала теорема Ферма лише стверджує, що якщо $p = 2n + 1$ – просте число, то $2^{2n} - 1$ ділиться без остачі на просте число $p$. Насправді можливі випадки, коли різниця $2^{2l} - 1$ ділиться без остачі на просте число $2n + 1$ навіть тоді, коли натуральне число $2l < p - 1 = 2n$. Так на 17 ділиться без остачі не тільки вираз $2^{16} - 1$, а й $2^8 - 1$ та $2^4 + 1$.

*Означення*. Найменше натуральне число $2l$, для якого $2^{2l} - 1 \equiv 0(\operatorname{mod} p)$ називають порядком числа 2 за модулем $p$. Можна довести, що порядок $2l$ є дільником числа $p - 1$.

Отже, $2l = 10$ – порядок числа 2 за модулем 11, а $2l = 8$ – порядок числа 2 за модулем 17. З наведених прикладів видно, що довжина циклу дорівнює числу $l$, а кількість циклів $k = n : l$. Тоді кожному циклу $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \ldots \to \alpha_l \to \alpha_1$ відповідає тотожність

$$\cos\frac{\alpha_1\pi}{2n+1}\cos\frac{\alpha_2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{\alpha_l\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^l}.$$

**Приклад 3.** Нехай $n = 15$. Оскільки $2n + 1 = 31$ – просте число, то за малою теоремою Ферма $2^{30} - 1 \equiv 0(\operatorname{mod} 31)$, або $\left(2^5 - 1\right)\left(2^5 + 1\right)\left(2^{20} + 2^{10} + 1\right) \equiv 0(\operatorname{mod} 31)$, помічаємо, що $2^5 - 1 \equiv$ $\equiv 0(\operatorname{mod} 31)$. Тоді $2l = 10$ – порядок числа 2 за модулем 31, $l = 5$ – довжина циклу, $k = 15 : 5 = 3$ – кількість циклів (див. рис.3).

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 1$$

$$3 \to 6 \to 1 \to 7 \to 14 \to 3$$

$$5 \to 10 \to 11 \to 9 \to 13 \to 5$$

Рис. 3

Отже, тотожність $C(15)=\frac{1}{2^{15}}$ розпадається на три тотожності вигляду

$$\cos\frac{\pi}{31}\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{15\pi}{31}=\frac{1}{32},$$
$$\cos\frac{3\pi}{31}\cos\frac{6\pi}{31}\cos\frac{12\pi}{31}\cos\frac{7\pi}{31}\cos\frac{14\pi}{31}=\frac{1}{32},$$
$$\cos\frac{5\pi}{31}\cos\frac{10\pi}{31}\cos\frac{11\pi}{31}\cos\frac{9\pi}{31}\cos\frac{13\pi}{31}=\frac{1}{32}.$$

**Нехай тепер $2n + 1$ – складене число.**

Для подальшого аналізу звернемося до теореми Ейлера, яка узагальнює малу теорему Ферма.

**Теорема Ейлера.** *Якщо a і m – взаємно прості числа, то* $a^{\varphi(m)}-1=0(mod\ m)$.

Тут $\varphi(m)$ – кількість взаємно простих з $m$ чисел, які не перевищують $m$. Так, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(10) = 4$, $\varphi(16) = 10$. Для простого $p$ $\varphi(p) = p-1$. Звідси випливає, що мала теорема Ферма є окремим випадком теореми Ейлера. Якщо $m > 2$, то $\varphi(m)$ – парне число. При цьому, якщо $m = 2n+1$, то $\varphi(2n+1) = 2\lambda$, де $\lambda$ – кількість взаємно простих з $m$ чисел, що належать проміжку від 1 до $n$. Для $a = 2$ і $m = 2n+1$ за теоремою Ейлера виконується рівність $2^{2\lambda}-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}(2n+1))$. Насправді, справджується ще й одна з двох рівностей: або $2^{\lambda}-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}(2n+1))$, або $2^{\lambda}+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}(2n+1))$.

**Твердження 3.** Нехай $m$ – натуральне число, $m > 2$. Якщо $\varphi(m) = 2\lambda$ – кількість взаємно простих з $m$ чисел, які не перевищують $m$, тоді або $2^{\lambda}-1=0\ (\mathrm{mod}\ m)$, або $2^{\lambda}+1=0\ (\mathrm{mod}\ m)$.

**Можна довести, що порядок числа 2 за модулем $m$ є дільником числа $\varphi(m)$.**

**Множина, утворена з $\lambda$ взаємно простих з $2n + 1$ чисел, які не перевищують $n$, розбивається на $k$ циклів: $k = \lambda : l$.**

**Приклад 5.** Нехай $2n+1= 129 = 3\cdot 43$, тоді $\varphi(129) = 2\cdot 42 = 84$, $\lambda = 42$ – кількість взаємно простих з 129 чисел, що належать відрізку [1; 64]. Оскільки $2^{42}-1 = \left(2^7-1\right)\left(2^7+1\right)\left(2^{28}+2^{14}+1\right)$ і $2^7+1= 129$, то $2^{42}-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 129)$, $2l = 14$ – порядок числа 2 за модулем 129, тому множина, утворена з 42 взаємно простих з 129 чисел, які не перевищують 64, розбивається на 6 циклів:

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64), (5, 10, 20, 40, 49, 31, 62), (7, 14, 28, 56, 17, 34, 61),
(11, 22, 44, 41, 47, 35, 59), (13, 26, 52, 25, 50, 29, 58), (19, 38, 53, 23, 46, 37, 55),

які визначають відповідні тотожності. Так, наприклад,

$$\cos\frac{19\pi}{129}\cos\frac{23\pi}{129}\cos\frac{37\pi}{129}\cos\frac{38\pi}{129}\cos\frac{46\pi}{129}\cos\frac{53\pi}{129}\cos\frac{55\pi}{129}=\frac{1}{128}.$$

## Список літератури


1. *Репета В.К.* Тригонометричні тотожності та рекурентні співвідношення / Математика у школі.-№ 2.- Київ, 2007, с.45-54.