УДК 517.1 : 519.1

О.Д. Глухов, кандидат фіз.-мат. наук,
(Національний авіаційний університет, Україна)

ПОРОГОВИЙ ДЕКРЕМЕНТ ДЛЯ ЗВ'ЯЗНИХ КВАЗІВИПАДКОВИХ ГРАФІВ

В статті розглядаються квазівипадкі графи на основі 3-зв'язних графві. Вводиться поняття декременту квазівипадкового графа і розв'язується задача знаходження порогового значення декременту, при якому квазівипадковий граф залишається зв'язним з достатньо високою ймовірністю.

Квазівипадкові (або частково-випадкові) графи описують системи, структура яких може змінюватись внаслідок випадкового розриву частини зв'язків. Нехай G - звичайний граф з множиною G^0 вершин і множиною G^1 ребер, $|G^0| = n$, $|G^1| = m$, квазівипадковим графом на основі графа G називається граф $G(p)$ з множиною $(G(p))^0 = G^0$ вершин і з випадковою множиною $U = (G(p))^1$, ребер для якого виконуються умови: $Prob\ (u \in U) = p$ при $u \in (G)^1$ і $Prob\ (u \in U) = 0$ при $u \notin (G)^1$. Величину $\lambda = mq, q = 1 - p$ будемо називати декрементом квазівипадкового графа. Очевидно, що декрекмент це є математичне сподівання величини $|U| - m$. В загальному випадку декремент розглядатиметься як деяка функція: $\lambda = \lambda(m)$**;** якщо λ є константою, то граф $G(p)$ називаєтьтся квазівипадковим графом пуассонівського типу. Такі графи вивчались в роботах [1, 2], де отримано, зокрема, наступний результат:

Теорема [2]. Якщо $G(p)$ – квазівипадковий граф пуассонівського типу на основі 3-зв'язного планарного графа G, то для ймовірності P його зв'язності вірна наступна оцінка:

$P \geq 1 - cm^{-2}$, де c –деяка стала.

В цій роботі розглядається питання порогового значення декременту, тобто такого значення величини λ при якому квазівипадковий граф на основі 3- зв'язного графа буде зв'язним з ймовірністю $1 - o(1)$.

Для розв'язання цієї задачі спочатку знайдемо оцінку числа $\sigma_k(G)$ мінімальних (по включенню) k- реберних розрізів 3-реберно зв'язного графа G (у графі G допускаються кратні ребра і петлі). Квазіребром графа G будемо називати такий ланцюг, кінцеві вершини якого мають у цьому графі степені більше 2-х, а усі внутрішні вершини мають степінь 2. Через $\tilde{G}$ будемо позначати граф, що одержується з даного графа G заміною усіх квазіребер на звичайні ребра, тобто "стиранням" усіх вершин степені 2. Також позначимо через $G_u^{'}$ і $G_u^{''}$ графи, що одержуються з даного графа G відповідно видаленням і стягуванням ребра u [3].

Лема 1. Будь-який 3-реберно зв'язний граф G на n вершинах, $n \geq 3$, можна побудувати індуктивно: $G_0 \to ... \to G_k \to G_{k+1} \to ... \to G_m = G$ так, що:

- граф G_0 - 3-реберно зв'язний граф на 2- вершинах з 3-ма кратними ребрами;
- для кожного k граф $\tilde{G}_k$ є 3-реберно зв'язним ;
- граф G_{k+1} одержується з графа G_k додаванням до нього простого ланцюга так, що кінцеві вершини x та y ланцюга ототожнюються відповідно з вершинами a і b графа G_k, які не є обидві внутрішніми вершинами одного його квазіребра.

Лема 2. Якщо G - 3-реберно зв'язний граф на n вершинах, $n \geq 3$, то існує таке ребро , що обидва графи $\tilde{G}_u^{'}$ і $G_u^{''}$ будуть 3-реберно зв'язними.

Теорема [4]. Якщо G - 3-реберно зв'язний граф на n вершинах, $n \geq 3$, то

$$\sigma_k(G) \le 2^{k-2}\binom{n+k-3}{k-2}, \text{ де } k \ge 3.$$

Наслідок. **Число 3-розрізів 3-реберно зв'язного графа на *n* вершинах не перевищує *2n.***

Відомо, що у випадку, коли G - 3-зв'язний граф, для ймовірності P справедлива наступна оцінка [1]:

$$Q = 1 - P \le \sum_{k=3}^{m} \sigma_k q^k,$$

де $q = 1 - p$, $\sigma_k = \sigma_k(G)$ - число мінімальних(по включенню) реберних k-розрізів графа G.

Отже, згідно з теоремою [4] маємо наступну оцінку для Q:

$$Q = 1 - P \le \sum_{k=3}^{m} \sigma_k q^k \le \sum_{k=1}^{m-2} 2^k \binom{n+k-1}{k} \lambda^{k+2} m^{-k-2} \le \frac{\lambda^2}{m^2} \sum_{k=1}^{m-2} 2^k \binom{n+k-1}{k} \lambda^k m^{-k}.$$

Зауважимо, що для мінімальних розрізів 3-реберно зв'язного графа мають місце нерівності $k \le m - n + 2$, $n \le m - 1$, звідки легко отримати нерівність $n(n+1)...(n+k-1) \le m^k$.

Враховуючи тепер, що $\binom{n+k-1}{k} = \frac{1}{k!} n(n+1)...(n+k-1) \le \frac{1}{k!} m^k$, отримуємо наступні співвідношення:

$$Q = \frac{\lambda^2}{m^2} \sum_{k=1}^{m-2} 2^k \frac{m^k}{k!} \lambda^k m^{-k} = \frac{\lambda^2}{m^2} \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(2\lambda)^k}{k!} \le \frac{\lambda^2}{m^2} e^{-2\lambda} = \left(\frac{\lambda e^{-\lambda}}{m}\right)^2.$$

Якщо покласти $\lambda = \alpha \ln m$, де α - деяка константа, $\alpha < 1$, то отримаємо остаточну оцінку: $Q \le \left(\frac{\alpha m^{\alpha} \ln m}{m}\right)^2 = \left(\frac{\alpha \ln m}{m^{1-\alpha}}\right)^2 = o(1)$.

Таким чином доведено наступне твердження.

Теорема 1. Якщо $G(p)$ - квазівипадковий граф, $p = 1 - \lambda / m$ на основі G - 3-реберно зв'язного графа на n вершинах, $n \ge 3$, з m ребрами, то величина $\lambda = \alpha \ln m$, де α - деяка константа $\alpha < 1$, буде його погроговим декрементом .

Список літератури

1. *Глухов О.Д.* Проблема зв'язності частково-випадкових графів //Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. – К.: ІПМЕ НАНУ, 2008. – Вип.47. – С. 12-15.

2. *Глухов О.Д.* Про зв'язність планарних pr- графів пуассонівського типу// ІІ Український математичний конгрес, 27-29 серпня 2009 р.: тези доп. – К., 2009. – режим досту-пу: http://www.imath. kiev.ua/~congress2009.

3. *Diestel R.* Graph Theor //NewYork : Springer-Verlag, 2000.-322p.

4. *Глухов О.Д.* Про число розрізів 3-зв'язного графа// XIII міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, 13-15 травня 2010 р.: тези доп. – К.: НТУУ, 2010. – Ч.1. – С. 92.