

**ПРО ВПЛИВ НЕДНОРІДНОГО ШАРУ ПЕРЕШКОД НА СТАБІЛІЗОВАНИЙ ПОТІК РІДИНИ В КРУГЛІЙ ТРУБІ**

Сформульовано задачу про ламінарний потік в'язкої рідини в круглій трубі з легкопроникною шорсткістю (ЛПШ) біля стінок. Дослідження проведено чисельно та аналітично для лінійного випадку. Отримано профілі швидкості залежно від ступеня проникності, перевірено відому залежність для гідравлічного опору труби.

На сьогоднішній день результати експериментів та математичного моделювання легкопроникної шорсткості (ЛПШ) застосовуються виключно у плоскій постановці для вирішення як екологічних, так і технічних питань [1,2]. До розгляду пропонується осесиметричний випадок, коли потік в'язкої нестисливої рідини взаємодіє з ЛПШ, зосередженій на стінках круглої труби. Дане дослідження, на відміну від попереднього [3], проведене для неоднорідної ЛПШ.

Важливе значення розв'язок поставленої задачі має, зокрема, для потреб інженерної практики.

Нехай шар перешкод на стінках циліндру виконано із стержнів діаметром  $d$  висотою  $h$  (рис.1). Очевидно, що густина шару перешкод в перерізі потоку збільшується з наближенням до центру круглої труби. (зона ЛПШ:  $R - h \leq r \leq R$ , якщо  $r$  – відстань від осі, а  $R$  – радіус труби)

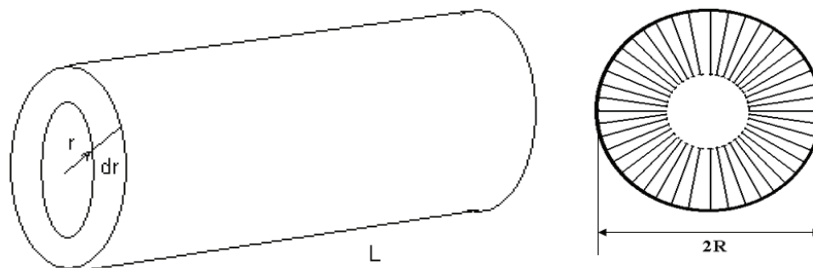


Рис. 1. Фрагмент труби з неоднорідною ЛПШ

Обмежимося принциповим розглядом задачі для квазіламінарного потоку ( $\mu = const$ ). За умови гладкої труби матимемо відомий параболічний профіль швидкості [4]:

$$U(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2), \quad (1)$$

де  $\Delta p/L = const$ ,  $\Delta p = p_2 - p_1$ ,  $\Delta p < 0$ ,  $L = l_2 - l_1$ . Запропонований варіант ЛПШ має неоднорідну концентрацію перешкод. Моделюючи вплив перешкод на потік, введемо в рівняння (1) об'ємну силу  $f_*$ :

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = \frac{\Delta p}{L} + f_*. \quad (2)$$

Та традиційно врахуємо умову прилипання рідини до стінок та симетрію потоку на осі:

$$U(R) = 0; \quad \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (3)$$

Розглянемо нескінченно вузький елемент потоку, обмежений циліндрами радіуса  $r$  та  $r + dr$ , довільної довжини  $L$  (рис.1). Зрозуміло, що кількість перешкод (стержнів) на розгортці даного фрагменту та на відповідній розгортці стінки труби буде однаковою. Нехай

на вибраній довжині  $L$  розміщено  $N_1$  стержнів впоперек потоку та  $N_2$  – кількість таких рядів. Таким чином, на стінці площею  $S_w = 2\pi RL$  ( $m^2$ ), їх кількість становитиме  $N = N_1 \times N_2$ . Звідси маємо щільність шару перешкод на стінці труби ( $1/m^2$ ):

$$n_w = \frac{N}{S_w} . \quad (4)$$

А для бічної поверхні фрагменту радіуса  $r$  щільність ЛПШ є аналогічною величиною:

$$n_r = n(r) = \frac{N}{S_r} = \frac{N}{2\pi r L} = \frac{n_w R}{r} = \frac{n_w}{\bar{r}} , \quad (5)$$

де  $\bar{r} = r/R$  – безрозмірний радіус труби. Таким чином, маємо обернено пропорційну залежність між величинами  $n_r$  та  $\bar{r}$ .

Розглянемо тепер, яким же чином даний факт відобразиться на розподілі об'ємної сили  $f_*$ . Для цього візьмемо індивідуальну силу, яка діє на ділянку стержня-перешкоди висотою  $dr$ , лінійно залежною від першого степеня швидкості:  $F_i = -k \rho U S_i$ , де  $S_i = d \cdot dr$ , – міделева площа перешкоди ( $m^2$ ),  $k$ , – емпіричний коефіцієнт ( $m/c$ ). Тоді силу, розподілену в локальному об'ємі потоку рідини  $d\Omega = \pi(r+dr)^2 L - \pi r^2 L \approx 2\pi r L dr$ , і яка моделює вплив ЛПШ на цей потік, визначимо як границю відношення:

$$f = \lim_{dr \rightarrow 0} \frac{dF_i}{d\Omega} = \frac{-N \cdot k \rho U d \cdot dr}{2\pi r L \cdot dr} = -k \rho d n_r U . \quad (6)$$

В результаті сила в рівнянні (2) набуває вигляду розривної функції:

$$f(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R-h \\ -k \rho d n_r U, & R-h \leq r \leq R \end{cases} . \quad (7)$$

Обравши в якості характерних масштабів швидкість на осі та тертя на стінці за умов відсутності ЛПШ, як в [3], враховуючи (4)–(5), отримаємо задачу (2) – (3) в безрозмірному вигляді:

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{d\bar{U}}{d\bar{r}} \right) = -4 + \begin{cases} 0, & \bar{r} \in [0, 1-\bar{h}) \\ A(\bar{r})\bar{U}, & \bar{r} \in [1-\bar{h}, 1] \end{cases} , \quad (8)$$

$$\bar{U}(1) = 0 ; \quad \bar{U}'(0) = 0 . \quad (9)$$

Як бачимо, лише два безрозмірні параметри визначають задачу (8) – (9): висота ЛПШ  $\bar{h} = h/R$  та щільність ЛПШ  $A(\bar{r}) = A_0/\bar{r}$ , де  $A_0 = -k d n_w R^2 / \nu$ . Крім того, розподіл тертя по аналогії з [3] будемо знаходити за формулою:

$$\tau(r) = -\frac{1}{2} \frac{dU}{dr} . \quad (10)$$

Надалі риску над параметрами, як ознаку безрозмірності, опускатимемо.

Аналітичний розв'язок задачі (8)–(9):

а)  $r \in [0; 1-h)$  – зона поза ЛПШ:

$$U(r) = U_h + (1-h)^2 - r^2 ; \quad (11)$$

звичайно, тут значення  $U_h$  – невідоме, тому пізніше знайдемо його з умови спряження на рівні ЛПШ, де виконується:  $\tau_h = \tau(1-h-0) = \tau(1-h+0)$ ,

зокрема, враховуючи (10)–(11), матимемо:

$$\tau_h = \tau(1-h-0) = -\frac{1}{2} \frac{dU(r)}{dr} \Big|_{r=1-h-0} = 1-h . \quad (12)$$

б)  $r \in [1-h; 1]$  – область ЛПШ, де постає необхідність розв’язувати рівняння  $U'' + \frac{U'}{r} - AU + 4 = 0$ . Отриманий результат з урахуванням (10)–(12) є громіздким і виражений через функції Бесселя першого та другого роду (згладжуючи похибки округлень, уявні частини були відкинута).

Таким чином, маємо можливість однозначно побудувати розрахункові точки профілів швидкості та тертя (рис.2) для заданих параметрів ЛПШ  $h = 0,4$  і  $A_0 = 0, 10, 50, 100$ .

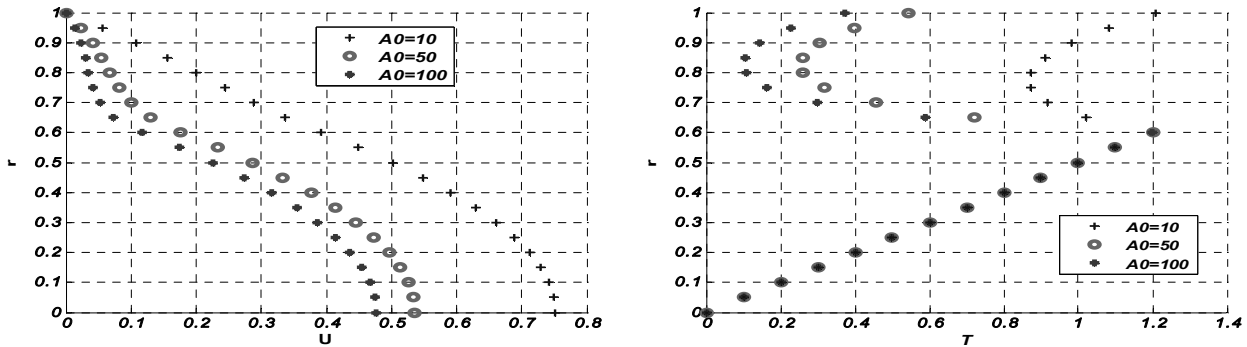


Рис. 2. Аналітичні профілі швидкості та тертя при неоднорідній ЛПШ

Аналізуючи залежність профілів швидкості та тертя від щільності ЛПШ  $A_0$  (рис. 2), помічаємо, що пропускна здатність труби тим гірша, чим більша щільність ЛПШ. При  $A_0 \rightarrow 0$  матимемо відомі [4] профілі – параболічний для швидкості та лінійний для тертя.

Чисельний розв’язок задачі (8)–(9): для його побудови було використано програму, перевірену для випадку однорідної ЛПШ [3]. Зокрема, перетворивши рівняння (8) в систему диференціальних рівнянь першого порядку та використавши відповідні команди MATLAB, результат візуалізовано (рис.3).

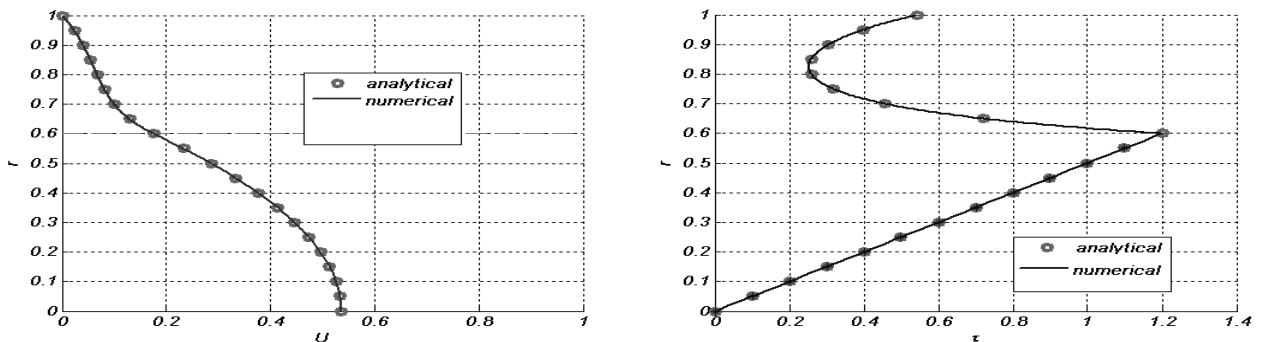


Рис. 3. Розрахункові точки аналітичного та чисельного профілів швидкості (а) та тертя (б) для  $h=0.4$ ,  $A_0=50$

Причому шляхом прямого порівнянням перевірено (рис.3), що аналітичний та чисельний розв’язки дають однакові розподіли швидкості та тертя. Отже, чисельний алгоритм можна вважати обґрунтованим. Це надалі дасть змогу застосовувати його до таких задач, що аналітичного розв’язку не мають.

Зауважимо, що на відміну від випадку однорідної ЛПШ, величина  $A(\bar{r})$  є змінною у шарі  $1-\bar{h} \leq \bar{r} \leq 1$ . Тому надалі в розрахунках будемо використовувати середнє значення:

$$A_{сep} = \int_{1-\bar{h}}^1 \frac{A(\bar{r})}{h} d\bar{r} = -\frac{A_0}{h} \ln|1-\bar{h}|.$$

Порівнюючи результати роботи чисельних алгоритмів у випадку однорідної ЛПШ (в якості щільності бралось середнє значення  $A_{сep}$ ) та неоднорідної (в якості аргументу бралось значення  $A_0$ ), спостерігаємо (таблиця 1) досить малу різницю, похибка становить 0,79%. Таким чином, надалі неоднорідністю ЛПШ можна нехтувати.

Таблиця 1

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Одн. ЛПШ	0,913	0,9128	0,9122	0,9112	0,9098	0,9081	0,9059	0,9033	0,9004	0,89712
Неод. ЛПШ	0,9245	0,9243	0,9237	0,9227	0,9213	0,9196	0,9174	0,9149	0,9119	0,9086
Похибка	0,0115	0,0115	0,0115	0,0115	0,0115	0,0115	0,0115	0,0115	0,0115	0,0115

Суттєва кількісна відмінність має місце для залежності коефіцієнта опору  $\lambda$  від числа Рейнольдса  $Re$  і параметрів ЛПШ. Зокрема, в [3] вказувалося, що

$$\lambda = \frac{32}{\bar{U}_{сер}} \frac{1}{Re}, \text{ де } \bar{U}_{сер} \stackrel{Df}{=} \frac{U_{сер}}{W} = 2 \int_0^1 r \bar{U}(r) dr.$$

Розрахунок середньої швидкості  $\bar{U}_{сер}$  в нашому випадку проведено інтегруванням чисельного профілю  $U(r)$ . Результати залежності добутку  $\lambda Re$  від параметра щільності легкопроникної шорсткості  $A_0$  представлені на рис.4. Спостерігається граничний перехід  $\lambda Re \rightarrow 64$  при  $A_0 \rightarrow 0$ , що підтверджує коректність отриманих результатів.

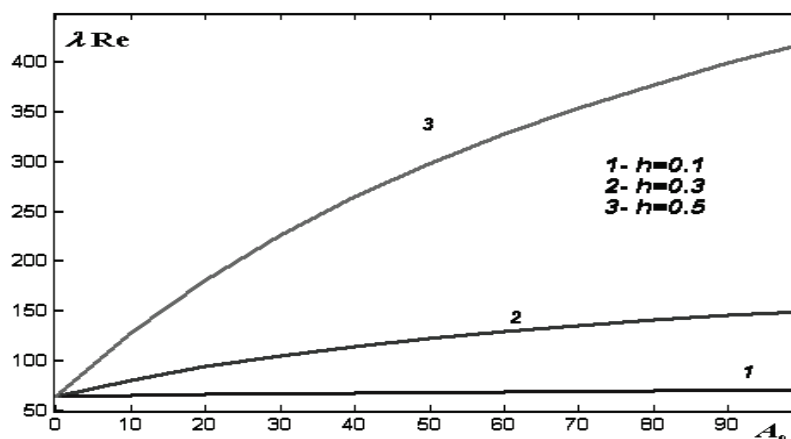


Рис. 4. Гідрравлічний опір для різних висот ЛПШ ( $h$ ) в залежності від щільності ЛПШ ( $A_0$ )

### Висновки

Представлено задачу про ламінарний рух в'язкої рідини крізь круглу трубу з неоднорідною легкопроникною шорсткістю (ЛПШ) біля стінок та розроблено чисельний і аналітичний (коли задача лінійна) алгоритми її розв'язування. Коректність постановки задачі з ЛПШ та запропонованих алгоритмів підтверджується двома можливими граничними випадками ( $h=0$ ,  $A_0 \rightarrow 0$ ), коли розв'язки зводяться до відомої задачі.

### Список літератури

1. Гаєв Е.А. Модели легкопроницаемой шероховатости для задач гидромеханики и теплофизики: Дис. д. техн. н.: 01.02.05 – К., 2000. – 345с.
2. Gayev Ye.A. and Hunt J.C.R. editors Flow and Transport Processes with Complex Obstructions: Applications to Cities, Vegetative Canopies, and Industry: NATO Science Series, Springer Publ. – 2006. – V. 236. – 350 pp.
3. Гаєв Є.О., Бердник О.М. Одновимірна ламінарна течія через круглу трубу з легкопроникною шорсткістю // Промислова гідрравліка і пневматика. – 2008. – № 4 (22) – С.34-38.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.