

*М.А. Мартиненко, доктор фізико-математичних наук (НУХТ, Україна),  
В.П. Мартиненко (Національний авіаційний університет, Україна)*

## ЗАДАЧА ПРО КРУЧЕННЯ ПРУЖНОЇ КУЛІ З КОНЦЕНТРИЧНИМ СФЕРИЧНИМ РОЗРІЗОМ

*Розглянуто розв'язок задачі про напружений стан пружної кулі, послабленої концентричним сферичним розрізом при крученні. Загальний розв'язок для кулі і сферичної оболонки поданий у вигляді розкладу за функціями Лежандра і після виконання граничних умов, задача зводиться до парних рівнянь. Дано числовий аналіз коефіцієнта інтенсивності напружень в залежності від площі та глибини сферичного розрізу.*

Розглянемо осесиметричну задачу теорії пружності про кручення однорідної пружної кулі радіуса  $R$ , послабленої концентричним сферичним розрізом по поверхні  $S(r = r_0 < R, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r, \theta, \varphi$  – сферичні координати).

Єдину відмінну від нуля проекцію вектора переміщень  $U_\varphi = U$  і компоненту тензора напружень  $\tau_{r\varphi} = \tau$  в областях  $V_1(r < r_0)$  і  $V_2(r > r_0)$  можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} Gu_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n P_n^1(\cos \theta); \quad \tau_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n-1) r^{n-1} P_n^1(\cos \theta), \\ Gu_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n r^n + c_n r^{-n-1}) P_n^1(\cos \theta); \\ \tau_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)b_n r^n - (n+2)c_n r^{-n-2}] P_n^1(\cos \theta), \end{aligned}$$

де  $a_n, b_n, c_n$  – нескінченні послідовності невідомих коефіцієнтів;  $G$ -модуль зсуву матеріалу кулі;  $P_n^1(\cos \theta)$  – приєднанні функції Лежандра [3]. Після застосування до даної задачі принципу Бюкнера [4] одержимо наступні граничні умови:

$$\tau_2 = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = R, \quad (1)$$

$$\tau_1 = \tau_2; \quad u_1 = u_2, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = r_0, \quad (2)$$

$$\tau_1 = \tau_2 = f(\theta), \quad 0 < \theta < \theta_0, \quad r = r_0 \quad (3)$$

Умова (2) відповідає вимозі неперервності полів напружень і переміщень на поверхні кулі зовні розрізу, а відома функція  $f(\theta)$  відповідає зусиллям, які перенесенні на поверхню розрізу за принципом Бюкнера. Задовольняючи граничні умови (1)–(3) одержимо парну систему рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_0^n \beta^{-2n-1} \frac{n+1/2}{n+2} P_n^1(\cos \theta) &= 0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \quad \beta = \frac{r_0}{R}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_0^{n-1} \beta^{-2n-1} (n-1)(1-\beta^{2n+1}) P_n^1(\cos \theta) &= f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язок системи (4) будемо на основі розривної суми і інтегрального представлення [5, 6] наведених нижче:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1/2}{n(n+1)} \cos(n+\frac{1}{2})t P_n^1(\cos \theta) &= -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \frac{\sin t H(t-\theta)}{\sin \theta \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \theta}}; \\ \frac{n+1/2}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\sin x \sin(n+1/2)x}{\sin \theta \sqrt{2 \cos x - 2 \cos \theta}} dx; \end{aligned}$$

де  $H(t - \theta)$  – функція Хевісайда.

Розв'язок парних рівнянь шукаємо у вигляді [6,7]

$$-b_n r^{n-1} \beta^{-2n-1} = \frac{n+2}{n(n+1)} \int_0^{\theta_0} \varphi(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt, \quad (5)$$

де  $\varphi(t)$  – нова невідома функція, неперервна разом зі своєю першою похідною при  $0 \leq t \leq \theta_0$ .

При виконанні інтегральної умови  $\int_0^{\theta_0} \varphi(t) \cos \frac{t}{2} dt = 0$ , інтегральний оператор (5) тотожно задовольняє першому рівнянню системи (4). Після підстановки (5) у друге рівняння (4) приходимо до наступного рівняння Абеля:

$$\int_0^{\theta} \frac{\sin x \varphi(x)}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \theta}} dx = \sin \theta f(\theta), \quad (6)$$

де 
$$\Phi(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \varphi(t) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{n+1/2} (1-\beta^{2n+1}) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right] dt. \quad (7)$$

Застосовуючи до (6) формулу обернення інтегрального рівняння Абеля [7], одержимо

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi \sin x} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(\theta) \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos x}} = F(x).$$

Зауважимо, що внутрішня сума в (7) знаходиться в замкнутому вигляді в класі узагальнених функцій, і в кінцевому результаті задача зводиться до наступного інтегродиференціального рівняння:

$$\varphi'(x) + \frac{9}{4} \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^{\theta_0} \varphi(t) K(t, x) dt = F(x), \quad (8)$$

де

$$K(t, x) = \frac{\beta(1-\beta^2)}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{x-t}{2} [1+4\beta^2 + \beta^4 + 2\beta^2 \cos(x-t)]}{[1-2\beta^2 \cos(x-t) + \beta^4]^2} + \right. \\ \left. + \sin \frac{x+t}{2} \cdot \frac{1+4\beta^2 + \beta^4 + 2\beta^2 \cos(x+t)}{[1-2\beta^2 \cos(x+t) + \beta^4]^2} \right\} - \\ - \frac{9}{4\pi} \left[ \operatorname{arctg}\left(\frac{2\beta}{1-\beta^2} \sin \frac{x-t}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\beta}{1-\beta^2} \sin \frac{x+t}{2}\right) \right].$$

Компонента тензора напружень  $\tau_{r\varphi}$  на поверхні кулі зовні розрізу визначається формулою

$$\sin \theta \tau_{r\varphi}(r_0, \theta) = \frac{-\sin \theta_0 \varphi(\theta_0)}{\sqrt{2 \cos \theta_0 - 2 \cos \theta}} + \int_0^{\theta_0} \frac{\sin x F(x) dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \theta}} + \\ + \frac{\theta}{4} \sqrt{2 \cos \theta_0 - 2 \cos \theta} \int_0^{\theta_0} \varphi(t) dt + \int_0^{\theta} \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \theta}} \int_0^{\theta_0} \varphi(t) K(t, x) dt.$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень знаходимо із граничної рівності [8]

$$k_3 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \tau_{r\varphi}(r_0, \theta) \sqrt{2r_0(\theta - \theta_0)} = -\frac{\varphi(\theta_0) \sqrt{r_0}}{\sqrt{\sin \theta_0}}.$$

Різниця переміщень на поверхнях розрізу визначається інтегралом

$$G(u_1 - u_2) = 2r_0 \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\varphi(t) \sin t dt}{\sin \theta \sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos t}}.$$

Дослідження полів напружень і переміщень в околі граничного кола сферичного розрізу проведемо в локальній полярній системі координат  $\rho, \gamma$ , яка показана на рисунку 1. Якщо скористатися одержаними наближеними значеннями приведених нижче сум

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1/2} \frac{(n+1/2)P_n^1(\cos \theta)}{n(n+1)} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_0 \approx -\frac{\sqrt{r_0} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{2\rho \sin \theta_0}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1/2} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{n(n+1)} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_0 \approx -\frac{\sqrt{2\rho} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{r_0 \sin \theta_0}} + c,$$

То для полів напружень і переміщень в околі розрізу отримаємо наступні асимптотичні вирази:

$$\tau_{r\varphi}^{(2)} \approx -\frac{k_3}{\sqrt{2\rho}} \sin \frac{\gamma}{2}; \quad Gu_{\varphi} \approx k_3 \sqrt{2\rho} \sin \frac{\gamma}{2} + c.$$

**Приклад.** Нехай переміщення точок кулі пропорційні їх віддалям до осі **OZ** і площини  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . В цьому випадку права частина рівняння (8) приймає вигляд:

$$F(x) = \frac{8a}{5\pi} \sin \frac{5x}{2}; \quad a = -\alpha Gr_0,$$

де  $\alpha$  – кут закручування на одиницю довжини. При  $\beta = 0$  одержимо задачу про сферичний розріз в пружному просторі, яка розглядалася в [9,10]. Зауважимо, що в цих роботах відсутні числові результати, а також не приведені формули для визначення коефіцієнтів інтенсивності.

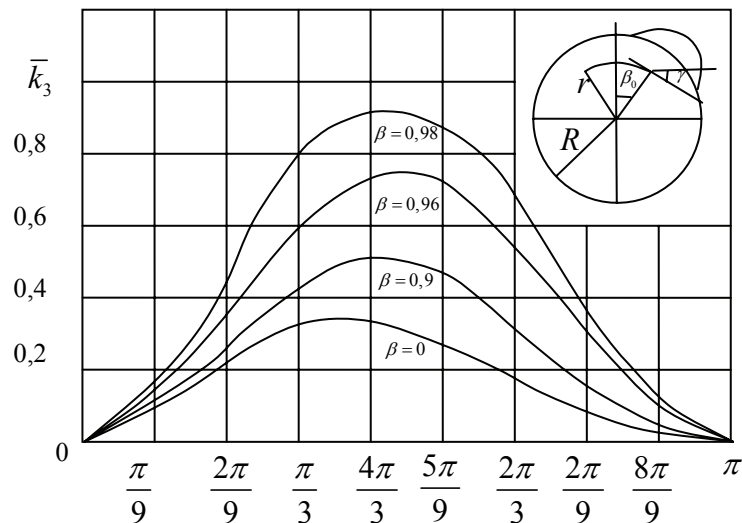


Рис.1. Залежність коефіцієнта інтенсивності напружень від кута розрізу. При  $\beta = 0$  розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{a}{\pi} \left[ \frac{1}{3} (4 \cos \theta_0 - 1) \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right],$$

а коефіцієнт інтенсивності визначається за формулою:

$$\bar{k}_3 = -\frac{\pi k_3}{a\sqrt{r_0}} = \frac{2}{3}\sqrt{\sin\theta_0}\left(\sin\frac{\theta_0}{2} + \sin\frac{3\theta_0}{2}\right). \quad (9)$$

На рисунку представлена поведінка коефіцієнтів в залежності від кута  $\theta_0$  при  $\beta = 0; 0,9; 0,96; 0,98$ . Аналізуючи числові результати робимо висновок, що при  $\beta < 0,6$ , коефіцієнт інтенсивності можна розраховувати за формулою (9) і при цьому відносна похибка не перевищуватиме п'яти відсотків.

**Висновки.** На основі отриманого аналітичного розв'язку мішаної просторової задачі теорії пружності про кручення пружної кулі зі сферичною тріщиною проведений аналіз коефіцієнта інтенсивності напружень  $k_3$  і дані практичні рекомендації щодо інженерної оцінки міцності пружних тіл методами лінійної механіки руйнування.

### Список літератури

1. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.- Киев: Наук.думка, 1979.-264с.
2. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел.- М.: Физматгиз, 1963.- 686с.
3. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций/Под.ред. С.В. Фомина.- М.: Мир,1952.- 476с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.: Наука, 1966.- 707с.
5. Мартыненко М.А., Улитко А.Ф. Напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде//Прикл.механика,- 1978.- 14, №9.-23с.
6. Мартыненко М.А. Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка//Мат. физика.- 1979.- №26.- С.106-109.
7. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики.- Л.: Наука, 1977.- 220с.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наук. думка, 1976.- 443с.
9. Уфлянд Я.С., Меленевская Е.С. Кручение упругого пространства ослабленного сферическим разрезом// Прикл. механика.- 1977.- 7, №2.- С.111-114.
10. Зюзин В.А., Смирнов С.А. Кручение упругого пространства ослабленного сферическим разрезом//Динамика и прочность тяжелых машин.- 1982.- №6.- С.173-179.