УДК: 519.6

І.В. Бейко, доктор технічних наук
(Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», Україна)

ОПТИМАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНО-КОМП'ЮТЕРНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ РОБОЧИХ МОДЕЛЕЙ.

Розглядаються методи побудови оптимальних математичних моделей складних систем на множині граф-операторних моделей. Важливими практичними критеріями оптимальності робочих математично-комп'ютерних моделей є критерії їх швидкодії та $B\delta$-адекватності. Задачі побудови оптимальних моделей охоплюють важливі задачі оптимізації тренувальних процесів для підвищення командної майстерності.

Складні керовані системи характеризуються взаємодією підсистем великої розмірності із неповними даними або й невідомими математичними моделями функціонування окремих підсистем, що ускладнює практичне застосування математичних методів їх оптимізації. Методи оптимізації складних систем в умовах неповних даних будуються на принципах оптимального використання наявної різнорідної побічної інформації про причинно-наслідкові залежності між взаємодіючими підсистемами. Для раціонального вибору важливої інформації із наявних доступних джерел використовуються методи розв'язуючих операторів для граф-операторних моделей [1,2], вузлами яких є математичні моделі підсистем керованої системи та часткові причинно-наслідкові залежності у взаємодії керованих підсистем. Методи оптимізації складних керованих систем, що базуються на використанні оптимізованих граф-операторних моделей, суттєво розширюють можливості оптимізації системи навіть на випадки невідомих математичних моделей складної системи. Наприклад, використання граф-операторних моделей для оптимізації траєкторії механічного руху перевернутого n-колінного маятника на жорстких чи на пружних стержнях (або для оптимізації механічного руху системою n фізичних тіл, пов'язаних силами й моментами їх попарної взаємодії) дозволяє будувати оптимальні траєкторії і без повної системи диференціальних рівнянь, яка описує механічний рух всієї системи (відомо, що труднощі побудови такої системи диференціальних рівнянь різко зростають із зростанням n і тому повна система буває надто громіздкою при великих значеннях n). Методи побудови оптимальних керувань з використанням граф-операторних моделей реалізуються також і для керування складними процесами із розподіленими параметрами.

У загальному випадку *s*-та підсистема *k*-го вузла уніфікованої граф-операторної моделі складної керованої системи описується системою алгебраїчних, інтегральних чи узагальнених операторних алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь

$$A_{ks}(x_{ks}, z_{ks}, u_{ks}) = 0,\ z_{ks} = \varphi_{ks}(x,u) \in Z_{ks},\ s = \overline{1, N_{ks}},\ k = \overline{1, N_k},$$

що пов'язують причинно-наслідкові залежності між фазовим станом $x_{ks} \in X_{ks}$ ks-ої підсистеми, її локальними керуваннями $u_{ks} \in U_{ks}$ та зв'язками $z_{ks} \in Z_{ks}$ ks-ї підсистеми із іншими підсистемами. Складену із таких підсистем граф-операторну модель

$$A(x,u) \square \left(A_1(x,u), \ldots, A_{N_k}(x,u)\right) = 0,\ x \square (x_1, \ldots, x_{N_k}),$$
$$x_k \square (x_{k1}, \ldots, x_{kN_{ks}}),\ u \square (u_1, \ldots, u_{N_k}),\ u_k \square (u_{k1}, \ldots, u_{kN_{ks}}),$$
$$A_s(x,u) \square \left(A_{1s}(x_{s1}, \varphi_{1s}(x,u), u_{1s}), \ldots, A_{N_k s}(x_{N_k s}, \varphi_{N_k s}(x,u), u_{N_k s})\right),$$

разом із підсистемою спостереження $v = C(x,u)$ називаємо *$B\delta$-адекватною на множині $V \times U$ за метрикою ρ*, якщо система $A(x,u) = 0$, $v = C(x,u)$ визначає значення $w \square B(x,u)$ заданого критерію оптимальності B із похибкою, що не перевищує числа $\delta > 0$, тобто, якщо функція $d(u,v) \triangleq \max_{x\in \bar{X}(u,v)} \rho(w, B(x,u))$, визначена на множині $\bar{X}(u,v)$ допустимих траєкторій x при керуванні u та спостереженнях $v = C(\bar{x},u)$, задовольняє нерівність $\max_{u\in U}\max_{v\in V} d(u,v) \le \delta$.

Якщо граф-операторна модель $A(x,u)=0$ із підсистемою спостереження $C(x,u)=v$ є $B\delta$-адекватною на множині $V\times U$, то існує розв'язуючий оператор F, який задовольняє нерівність

$$\max_{u\in U}\max_{v\in V}\max_{x\in \bar{X}(u,v)} \rho(F(v,u), B(x,u) \le \delta .$$

За допомогою оператора F оптимальне на множині $D\subset U$ значення $B(x,u)$ для системи

$$A(x,u)=0\,,\ C(x,u)=v$$

визначається з точністю δ як оптимальне на D значення $F(u,v)$. Побудова оператора F на множині $\bar{\bar{X}}(u,v)$ здійснюється за допомогою відшукання оператора $\Re^{\delta} : \left(U\times V\times W_A \times W_C\right)\to W_B$ [3], який для заданих частинних функцій

$$A:(X\times U)\to W_A,\quad B:(X\times U)\to W_B\,,\ C:(X\times U)\to W_C$$

задовольняє нерівність

$$\max_{x\in \bar{\bar{X}}(u,v)} \rho\Big(\Re^{\delta}\left(u,v,A(x,u),C(x,u)\right),\ B(x,u)\Big)\le\delta\,,\ (x,u,v)\in \bar{\bar{X}}(u,v)\times U\times V\ .$$

***Теорема* 1** [1]. *Якщо для множини $\bar{\bar{X}}(u,v)\supset \bar{X}(u,v)$ і для числа $\delta\ge 0$ існує оператор $\Re^{\delta}$, то граф-операторна модель $A(x,u)=0,\ C(x,u)=v$ є $B\delta$-адекватною і відхилення (за метрикою ρ) значення $\Re^{\delta}(u,v,0,v)$ від значення розв'язуючого оператора $F(v,u)$ не перевищує числа δ.*

Звідси випливає, що відхилення оптимального на множині $D\subset U$ значення $B(x(u,v),u)$, де $x=x(u,v)$ є розв'язком граф-операторної моделі $C(x,u)=v$, $A(x,u)=0$, від оптимального на множині D значення $\Re^{\delta}(u,v,0,v)$ не перевищує за метрикою ρ числа δ. Умови існування розв'язуючих операторів F отримані у роботах [1-3] (де побудовані такі оператори).

Наявність інформації про наближений розв'язок $(\bar{x},\bar{u})$ системи $A(x,u)=0$, $C(x,u)=v$ може бути використана для побудови алгоритмів прогнозування підвищеної точності з використанням асимптотично-розв'язуючих операторів $\Re_s$ та $\Re_{sq}$, які в околі $(\bar{x},\bar{p})$ задовольняють асимптотичні рівняння

$$\dim\Big(\Big\{B(x,p)-\Re_s\left(\bar{x},A(x,p),C(x,p)\right),\ (x,p)\in M\Big\}\Big)=O\Big(\|\,x-\bar{x}^k\,\|^s\Big),$$

$$\dim\Big(\Big\{B(x,p)-\Re_{sq}\left(p,\bar{p},\bar{x},A(x,p),C(x,p)\right),\ (x,p)\in M\Big\}\Big)=O\Big(\|\,x-\bar{x}^k\,\|^s\Big)+O\Big(\|\,p-\bar{p}\,\|^q\Big).$$

Такі асимптотично-розв'язуючі оператори побудовані для складних моделей, які описуються багатовимірними неявними алгебро-диференціальними та алгебро-інтегро-диференціальними рівняннями

$$f(t,x,u)=f^0\left(x(t_0),u,\dot{x}(t),x(t),u(t),t,\ \int\limits_{D(t,u,x)} f^1\left(x(s),u(s),s,x(t),u(t),t\right)ds\right)=0,$$

із ліпшицевими по фазових змінних функціями f^0, f^1 та узагальненими крайовими умовами

$$F(x,u) \equiv F^0\left(x(t_0), x(T), u, \int_{t_0}^{T} F^1\left(\dot{x}(t), x(t), u(t), t,\right.\right.$$

$$\left.\left.\int_{t_0}^{T} F^2\left(\dot{x}(s), x(s), u(s), s, \dot{x}(t), x(t), u(t), t\right) ds\right) dt\right) = 0.$$

У цьому випадку асимптотично-розв'язуючий оператор $\Re$ для цільової функції

$$B(x,u) \equiv B^0\left(x(t_0), x(T), u, \int_{t_0}^{T} B^1\left(\dot{x}(t), x(t), u(t), t,\right.\right.$$

$$\left.\left.\int_{t_0}^{T} B^2\left(\dot{x}(s), x(s), u(s), s, \dot{x}(t), x(t), u(t), t\right) ds\right) dt\right)$$

побудований у вигляді $\Re(u) \equiv B(w,u) + \eta F(w,u) + M_1(u,\psi,\eta)x(t_0) + \int_{t_0}^{T} \psi^*(t) f(t,w,u)dt,$ де η і $\psi(t)-$ розв'язок відповідної гамільтонової системи спряженої до системи $f(t,x,u)=0$ з інтегралами по спряженій області $D^*(t,u,x)$.

Розглянемо приклад застосування асимптотично-розв'язуючих операторів у побудові робочих моделей високого порядку для прогнозування траєкторій x операторного рівняння $dx(\tau)/d\tau = f\left(x(\tau),\tau\right)$. У цьому випадку оператор F є асимптотично-розв'язуючим на інтервалі $\tau \in [t, t+H]$ для функції $v\left(x(t+H)\right)$ відносно неперервної по τ функції $Z\left(Q(\tau)\right)$ на розв'язку x задачі Коші $dx(\tau)/d\tau = f\left(x(\tau),\tau\right)$, $x(t) = x^0$, якщо для неперервних функцій p із околу x виконується асимптотична рівність

$$F(t,p,H,Z,Q) = v\left(x(t+H)\right) + \left(O(\| Z(Q) \|) + O(\| p-x \|)\right) H \| p-x \|,$$

а оператор $G(\tau)$ є асимптотично-розв'язуючим оператором s-го порядку за параметром h в околі t для функції $v\left(x(t+h)\right)$, якщо виконується асимптотична рівність $G(h) = v\left(x(t+h)\right) + O(h^s)$.

У випадку функцій $v\left(x(t+H)\right) \equiv Q(t+H)x(t+H)$ $, Z\left(Q(\tau)\right) \equiv dQ(\tau)/d\tau + Q(\tau)A(\tau)$ та неперервних на інтервалі $\tau \in [t, t+H]$ функції $Q(\tau), A(\tau) \equiv f'_x\left(p(\tau),\tau\right)$, $Z\left(Q(\tau)\right)$ і ліпшицевої по $p(\tau)$ матриці $f'_x\left(p(\tau),\tau\right)$ асимптотично-розв'язуючий для функції $v\left(x(t+H)\right)$ відносно $Z(Q)$ на розв'язках $x(t+H)$ оператор F визначається на неперервних функціях p із околу x рівняння

$$F(t,p,H,Z,Q) = Q(t+H)p(t+H) + \int_{t}^{t+H} Q(\tau)\left(f(p(\tau),\tau) - dp(\tau)/d\tau\right)d\tau,$$

а якщо функції $Q(\tau)$, $A(\tau) = f'_x\left(p(\tau),\tau\right)$, $p(\tau)$ та $x(\tau)$ задовольняють для $s = k+l+1$, $l \le k$, $\tau \in [t, t+h]$ асимптотичному рівнянню

$$dQ(\tau)/d\tau = -Q(\tau)A(\tau) + \mathrm{O}(h^k),\ p(\tau) = x(\tau) + \mathrm{O}(h^l),\ p(t) = x(t),$$

то оператор $G(h)$ s-го порядку обчислюється за формулою

$$G(h) = Q(t+h)p(t+h) + \int_{t}^{t+H} Q(\tau)\left(f\left(p(\tau),\tau\right) - dp(\tau)/d\tau\right)d\tau$$

і ми отримуємо чисельно-аналітичний алгоритм для обчислення значення $v\left(x(t+h)\right)$ з високим порядком точності $O(h^s)$.

При наявності в граф-операторній системі випадкових величин та випадкових процесів ω критерії оптимальності визначають за математичними сподіваннями $w \square M_{\omega} B(x,u,\omega)$ і для оптимізації модельованих випадкових процесів за критеріями максимізації математичного сподівання якості очікуваного результату використовуються методи стохастичної оптимізації. До такої задачі стохастичної оптимізації граф-операторної моделі приводиться, зокрема, і задача комплексної оптимізації тренувальних процесів із оптимізованими тактичними сценаріями атак та захисту за агрегованими критеріями максимізації математичного сподівання якості результатів. Важливими підсистемами такої граф-операторної моделі є підсистеми $A_{ks}(x_{ks}, z_{ks}, u^k, u^s, \omega_{ks}) = 0,$ $z_{ks} = \varphi_{ks}(x,u,\omega) \in Z_{ks}$ для обчислення розподілу ймовірностей x_{ks} випадкових результатів двоборства між k-м та s-м ігроками із індивідуальними показниками u^k та u^s їх майстерності у ситуації $z_{ks} = \varphi_{ks}(x,u,\omega)$. Зокрема, до важливих індивідуальних показників спортивної майстерності k-го ігрока належить: u_1^k, u_2^k - швидкість бігу на 30 м і на 100 м; u_3^k - висота стрибка; u_4^k - швидкість реакції (оцінюється за спеціальною методикою); u_5^k, u_6^k - сила і точність атакуючих ударів; u_7^k, u_8^k - сила і точність ударів по швидких м’ячах на низьких і високих траєкторіях польоту м’яча (оцінюється за спеціальною методикою); u_9^k - майстерність опанування фінтами (оцінюється за спеціальною методикою); u_{10}^k майстерність силового двоборства за оволодіння м’ячем (оцінюється за спеціальною методикою).

До важливих факторів командної спортивної майстерності, які впливають на розподіл ймовірностей остаточних результатів матчу, належить якість алгоритмів оптимізації стартового складу команди та оптимізації тактичних сценаріїв атаки і захисту із урахуванням індивідуальних показників спортивної майстерності та спроможності у виконанні індивідуальних завдань у оптимальних стратегіях переходів до контратак та до захисту.

Висновки

Використання розв’язуючих операторів для побудови оптимізованих математично-комп’ютерних моделей складних реальних систем в умовах неповних даних дозволяє підвищувати адекватність робочих математичних моделей за допомогою оптимального використання побічних джерел додаткової інформації. Побудовані методи оптимізації математичних моделей реальних систем можна успішно використовувати для оптимізації тренувальних процесів у підвищенні командної майстерності.

Список літератури

1. *Бейко И.В.* Функции для оценивания полезности информации в конструктивной теории оптимальных агрегированных моделей // Кибернетика и системный анализ. – 1996. - №3. - С.43-54.

2. *Бейко І.В.* Розвиток методів розв’язуючих та асимптотично-розв’язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей// Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. – 2002. - Вип.3.- С. 10-15.

3. *Бейко І.В., Зінько П.М.* Методи високих порядків для розв"язування задач Коші та багатомірних крайових задач за допомогою асимптотично-розв"язуючих операторів// Математичне та комп"ютерне моделювання / Кам"янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, - Кам"янець-Подільський: К-ПНУ, 2009. - Вип.1. - С.18-25.