УДК 303.4

А.В. Касьянов, доктор технічних наук,
В.В. Пахненко, кандидат технічних наук,
(Національний авіаційний університет, Україна)

ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ДИСИПАТИВНИХ СИСТЕМ

Запропоновано перетворення неконсервативної системи до консервативного виду. Формалізм Гамільтона для дисипативних систем. Наведено кількісний приклад динаміки.

Аналітична механіка консервативних систем, динаміка яких підпорядкована рівнянням Гамільтона

$$\dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i}, \quad \dot{\vec{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}, (i = \overline{1,n}) \qquad (1)$$

де $\vec{p}_i, \vec{q}_i$ координати та імпульси системи. *H*- гамільтоніан, розроблена досконально та озброєна довільною кількістю фундаментальних результатів. З другого боку, значно менше розроблена теорія неконсервативних систем, що описуються системою рівнянь

$$\dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i} + \vec{Q}_i, \quad \dot{\vec{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}, (i = \overline{1,n}) \qquad (2)$$

де $\vec{Q}_i$ узагальнені сили довільного приросту $\vec{Q}_i = \vec{Q}_i(\vec{p}_i, \vec{q}_i)$.

Якщо вдається знайти таке перетворення змінних $\vec{p}_i, \vec{q}_i \to \vec{p}^*{}_i, \vec{q}^*{}_i$ (перехід з простору Г до простору Г*), яке приводить систему (2) формально до вигляду (1), виникає можливість використати всі надбання теорії консервативних систем для дослідження динаміки неконсервативних систем. Зрозуміло, що в загальному вигляді таке перетворення знайти не можливо; але в деяких окремих випадках визначення функції $\vec{Q}_i(\vec{p}_i, \vec{q}_i)$ означені вище перетворення існують.

1. Випадок релеєвської дисипації.

Нехай сила в'язкого опору середовища пропорційна швидкості руху матеріальній частки в першому степені. Припустимо, що $\vec{V}(\vec{q}_i(t), t)$- швидкість руху середовища, $\vec{U}(\vec{q}_i(t), t)$- швидкість віддачі маси, $\Pi_i(\vec{q}_i(t), t)$- потенціал зовнішніх сил, $\Phi_{ij}(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|)$ - потенціал парного взаємодії (нехтуємо однозначно взаємодією трьох і більшого числа часток).

Розглядається система *N* матеріальних точок, змінної маси, що рухаються в неідеальному середовище і взаємодія з середовищем підпорядкована дисипативної функції Релея [1].

$$L^* = \sum_{i=1}^{N} \left[\exp\beta \cdot \dot{\vec{q}}_i \dot{\vec{q}}_i - 2\vec{\alpha}_i \dot{\vec{q}}_i - 2m^{-1} \cdot \exp\beta \cdot \left(\Pi_i + \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij} \right) \right],$$

де

$$\beta(t) = \int_0^\infty \delta(t-\zeta) \int m^{-1}(\zeta)[k(\zeta) + \dot{m}(\zeta)] d\zeta d\zeta$$

$$\vec{\alpha}_i(t) = \int_0^\infty \delta(t-\zeta) \int \exp\beta(\zeta) m^{-1}(\zeta) \begin{bmatrix} k(\zeta)\vec{V}(\vec{q}_i(\zeta), \zeta) + \\ + \dot{m}(\zeta)\vec{U}(\vec{q}_i(\zeta), \zeta) \end{bmatrix} d\zeta d\zeta .$$

$\delta(t-\varsigma)$ - функція Дірака, $m(t)$- закон відкидання маси, $K(\varsigma)$ - коефіцієнт в'язкого опору, що змінюється за часом в зв'язку із зміною розмірів частки. (Всі частки за припущенням мають однакову масу і однакову швидкість «випарування»). Нехай перехід з простору $\Gamma : (\vec{p}_i, \vec{q}_i)$ до простору $\Gamma^* : (\vec{p}^*{}_i, \vec{q}^*{}_i)$ відбувається відповідно до формул:

$$\vec{q}_i^* = \vec{q}_i;\ \vec{p}_i^* = 2m^{-1} \cdot \exp\beta \cdot \vec{p}_i - 2\vec{\alpha}_i; \tag{4}$$

Відповідні рівняння Гамільтона в цьому випадку мають вигляд:

$$\dot{\vec{p}}_i^* = -\frac{\partial H^*}{\partial \vec{q}_i^*};\ \dot{\vec{q}}_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial \vec{p}_i^*} \tag{5}$$

де

$$H^* = 2m^{-1} \exp\beta \cdot H$$

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m^{-1} \vec{p}_i \vec{p}_i + \Pi_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij} \right).$$

Оскільки система (5) виглядає формально як консервативна, всі здобутки теорії консервативних систем мають місця в просторі змінних $\vec{p}^{\,*}{}_i, \vec{q}^{\,*}{}_i$. Наприклад, інтегральний інваріант Пуанкаре - Картана існує в Γ^*

$$I = \oint_{l^*} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i^* \delta \vec{q}_i^* - H^* \delta t \right). \tag{6}$$

Це означає, що в «фізичному» просторі Г інваріантним є величина

$$I = \oint_{l} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(2m^{-1} \exp\beta \cdot \vec{p}_i - 2\vec{\alpha}_i \right) \delta \vec{q}_i - 2m^{-1} \exp\beta \cdot H \delta t \right] \tag{7}$$

Фазовий об’єм в Γ^* зберігається:

$$\int dG_N^* = \int dG_{N0}^* = const \tag{8}$$

В той же час, як фазовий об'єм в Г зменшується за законом

$$\int dG_N = J_N(0) J_N^{-1}(t) \int dG_{N0}^*, \tag{9}$$

де J_N - перетворення

$$J_N = 2^{3N} m^{-3N} \cdot \exp(3N\beta(t)). \tag{10}$$

Щільність фазових точок збільшується

$$\rho_N = J_N(t) J_N^{-1}(0) \rho_{N0}. \tag{11}$$

Якщо ввести функцію розподілу

$$F(t, \vec{q}_1, ..., \vec{q}_N, \vec{p}_1, ..., \vec{p}_N) = \frac{\rho_N}{N} \tag{12}$$

та відповідно функцію розподілу

$$F^*(t, \vec{q}^{\,*}{}_1, ..., \vec{q}^{\,*}{}_N, \vec{p}^{\,*}{}_1, ..., \vec{p}^{\,*}{}_N) = \frac{\rho^*{}_N}{N}, \tag{13}$$

тоді є справедливим рівняння Ліувілля

$$\frac{\partial F^*}{\partial t} + (F^*, H^*) = 0 \tag{14}$$

де дужки в термінах Пуассона.

В просторі Γ^* існує рівняння

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H^* \left(\frac{\partial S^*}{\partial \vec{q}}, \vec{q}, t \right) = 0 \tag{15}$$

В фізичному просторі рівняння Гамільтона - Якобі дисипативної системи має вид:

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + 2m^{-1} \exp\beta \cdot H \left[t, \vec{q}, \frac{1}{2} m \exp(-\beta) \left(\frac{\partial S^*}{\partial \vec{q}} + 2\vec{\alpha} \right) \right] = 0. \tag{16}$$

При обчисленні *H* враховується підсумовування за індексом *i*.

$$\frac{\partial S^*}{\partial \vec{q}_i} = 2m^{-1} \exp \beta \cdot \vec{p}_i - 2\vec{\alpha}_i; \quad \frac{\partial S^*}{\partial \vec{a}_i^*} = \vec{b}_i^* \tag{17}$$

де $\vec{a}_i^*, \vec{b}_i^*$ сталі вектори.

Доведено, що при використанні цього формалізму в задачах статичної механіки всі середні зберігають значення при переведенні $\Gamma \leftrightarrow \Gamma^*$.

Аналогічний формалізм можна побудувати у вигляді квадратичної функції. В цьому випадку функцію Лагранжа оберемо у вигляді [2]:

$$L = \left(f\ddot{q}^2 + gq\dot{q} + rq\right)e^{\zeta q} \tag{18}$$

де f, g, r, ς - деякі коефіцієнти.

Перетворення $\Gamma \to \Gamma^*$ виглядає як

$$p^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \left(2f\ddot{q} + gq\right)e^{\zeta q}; \;\; q^* = q \tag{19}$$

Цей результат може бути розповсюджено на багатовимірний випадок. Відповідне диференціальне рівняння руху має вид:

$$\ddot{q} + a(t)\dot{q}^2 + b(t)\dot{q} + c(t)q = w(t) \tag{20}$$

де $f = \exp\left(\int b(t)dt\right)$, $g = \int \left[r(t)\zeta + 2c(t)f(t)\right]dt$, $r = 2w(t)f(t)$.

Функція Гамільтона є

$$H^* = q.p^* - L^* = \frac{1}{4f}p^{*2}e^{-\zeta q} - \frac{g}{2f}p^*q - \left(rq - \frac{g}{4f}q^2\right)e^{\zeta q} \tag{21}$$

А рівняння Гамільтона має вид

$$\dot{p}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q}; \; \dot{q} = \frac{\partial H^*}{\partial p^*} \tag{22}$$

Всі результати консервативної механіки мають місце і в цьому випадку. Зокрема, отримані теореми збереження Еммі–Ньотер на підставі інваріантності і до відповідних груп перетворень збережених кількості руху, моменту кількості руху та енергії. Доведено, що у випадку квадратичної дисипації існує можливість врахування парної взаємодії часток.

2. Узагальнення принципу Гамільтона на підставі поєднання з принципом максимуму ентропії.

Принцип максимуму суб'єктивної ентропії представлений в роботах [1] , на основі якого можна отримати канонічні розподіли переваг $\pi(\sigma_i)$ на множені альтернатив $S_a : \sigma_i \in S_a$, $(i = \overline{1,n})$. Основною складовою функціонала є суб'єктивна ентропія,

$$H_\pi = -\sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i) \ln \pi(\sigma_i), \tag{23}$$

В цій роботі запропоновано гібридний варіаційний принцип, який дещо узагальнює принцип Ейлера –Лагранжа. Припустимо, що розглядається певна кількість критеріїв, яким відповідають функціонали

$$\bar{J}_i = \int_{t1}^{t2} F_i(t, x_i, \dot{x}_i)dt, \; i = \overline{1,N} \tag{24}$$

Цю множину критеріїв можна звести до варіаційної задачі з одним критерієм за допомогою згортання методом множників Лагранжіана λ_i, розглядаючи частину функціонала в виді ізопараметричних обмежень.

$$\bar{J}_i = K_i,$$

де K_i - фіксовані величини.

Розглядаючи функціонали $\bar{J}_i$ в більш рівноправному сенсі, зазначимо узагальнений критерій

$$J^* = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\sum_{i=1}^{N} \pi_i \cdot \ln \pi_i \pm \beta \cdot \sum_{i=1}^{N} \pi_i \cdot L_i + \gamma \cdot \sum_{i=1}^{N} \pi_i \right) dt \qquad (25)$$

В цьому функціоналі функції переваг π_i виступають як узагальнення коефіцієнтів Лагранжа. Функціонали мають усереднену миттєву ентропію переваг, а також складову, яка виникає в наслідок умови переваг

$$\sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i) = 1 \qquad (27)$$

Рівняння Эйлера –Лагранжа для функціонала (25) має вид:

$$\frac{\partial F_i^*}{\partial \pi_i} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_i^*}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial F_i^*}{\partial x_i} = 0 \qquad (28)$$

та представляють собою узагальнення відповідних рівнянь для звичайної ізопараметричної варіаційної задачі.

У суб'єктивному розумінні, її можна трактувати як варіаційну задачу з "перевагами". У більш розгорнутому вигляді рівняння (28) має вигляд

$$\frac{\partial F_i^*}{\partial \pi_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\pi_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i} \right) - \pi_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (29)$$

У більш розгорнутому вигляді рівняння (29) має вигляд

$$\frac{\partial F_i^*}{\partial \pi_i} = -\ln \pi_i - 1 \pm \beta F_i + \gamma = 0 \qquad (30)$$

та

$$\frac{d\pi_i}{dt} \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_q} + \pi_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_q} \right) - \frac{\partial F_i}{\partial x_q} \right) = 0 \qquad (31)$$

.

З урахуванням умови нормування з (30), отримаємо

$$\pi_i = \frac{e^{\pm \beta \cdot F_i}}{\sum_{s=1}^{N} e^{\pm \beta \cdot F_s}} \qquad (32)$$

.

Підставляючи (32) в (31) знайдемо рівняння для визначення функції $x_q(t)$.

Список літератури

1. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. -М.: Физматлит, 1961.-229с.
2. *Касьнов В.А.* Субъективный анализ. - К.: из-во НАУ, 2007.-512с.
3. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Изд.4 –М.: КомКнига, 2005.-312с.
4. *Стратонович Р.Л.* Теория информации. –М: сов. радио,1975.-424с.
5. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. – М.: Мир, 1991.-240с.

Jaynes E.T. Information Theory and Statistical Mechanics. I and II. - Phys.Rev. №2, №4,1957.