УДК:519.865

А.О. Антонова, кандидат технічних наук,
(Національний авіаційний університет, Київ, Україна)

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ БІЗНЕС - ЦИКЛУ ГУДВІНА

Наведено результати числового розв'язку нелінійної моделі ділового циклу з фіксованим часом запізнення в інвестиціях, запропонованого Р. Гудвіним [1]. Досліджено вплив параметрів моделі на нелінійні коливання і порівняно результатами, отриманими в [2] шляхом аналогового моделювання. Показано, що коливання Гудвіна збуджуються лише за умови, що незалежні інвестиції перевищують деяку порогову величину.

Модель бізнес-циклу Гудвіна має вигляд наступного диференціального рівняння з запізненням

$$\varepsilon\dot{y}(t) = -(1-\alpha)y(t) + \varphi\big(\dot{y}(t-\theta)\big) + A_{ni}(t)\ , \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

Тут $y(t)$ – дохід, $\varepsilon > 0$ та $\theta > 0$ – відповідно часи затримки у доході та інвестиціях, α – гранична схильність до споживання, $0 \le \alpha \le 1$, $\varphi(\dot{y})$ – інвестиції, індуковані зміною доходу, $A_{ni}(t)$ – автономні інвестиції. Функція $\varphi(\dot{y})$ задовольняє таким умовам:

1) $\varphi(0) = 0$; 2) $\varphi'(\dot{y}) \ge 0$ for all $\dot{y}$; 3) $\varphi'(0) = r > 0$; 4) $\lim\limits_{\dot{y}\to+\infty} \varphi(\dot{y}) = \varphi_+$, $\lim\limits_{\dot{y}\to-\infty} \varphi(\dot{y}) = \varphi_-$,

r – коефіцієнт акселерації.

Гудвін не розв’язував рівняння (1). Він наближено розклав його у ряд по θ і отримав наступне нелінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\theta\varepsilon\ddot{y}(t) + (\varepsilon + s\theta)\dot{y} - \varphi(\dot{y}) + sy = A_{ni}(t+\theta), \tag{2}$$
$$s = 1-\alpha,\ 0 \le s \le 1.$$

Гудвін показав, що якщо виконана умова

$$r > \varepsilon + s\theta,$$

то рівняння.(2) за своїми властивостями близьке до рівняння Релея і має розв’язок у вигляді стійкого граничного циклу.

Взагалі кажучи процедура отримання рівняння (2), яка використана Гудвіним, не є коректною. Детальне вивчення властивостей розв’язків рівняння. (1) було проведено в [2] за допомогою аналогового комп'ютерного моделювання. Цікаво, що крім розв’язків типу граничного циклу Гудвіна в [2] було знайдено близько 25 інших граничних циклів (коливань релаксаційного типу) з малими періодами.

Ми провели числові дослідження моделі ділового циклу (1) з метою підтвердити (чи спростувати) наявність короткоперіодичних коливань, виявлених у роботі [2]. Задача формулюється наступним чином:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{y}(t) = -sy(t) + \varphi\big(\dot{y}(t-\theta)\big) + A_{ni}(t),\ 0 \le t \le t_f, \\ y(t) = \Phi(t),\ -\theta \le t \le 0, \end{cases} \tag{3}$$

де $\Phi(t)$ – початкова функція. Як і в роботах [1]-[2], функція $\varphi(\dot{y})$ вибрана у вигляді кусково-лінійної

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_+,\ \dot{y} > \dot{y}_+, \\ r\dot{y}(t), \dot{y}_- \le \dot{y} \le \dot{y}_+, \\ \varphi_-,\ \dot{y} < \dot{y}_-. \end{cases} \qquad \dot{y}_+ = \frac{\varphi_+}{r},\ \dot{y}_+ = \frac{\varphi_+}{r},$$

Для чисельного розв’язування рівняння (1) ми використовували програму RADAR5 , наведену у [4].

Детально поведінка розв'язків рівняння (1) описана у нашій роботі [4]. Один із важливих результатів показаний на рис.1a-1c для випадку коли незалежні інвестиції сталі у часі, $A_{ni}(t) = A > 0$, а $\Phi(t) = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\theta = 1$ і $s = 0.4$. З них випливає, що існує порогове значення $A_{cr} \approx 1.24$. Якщо $A > A_{cr}$, то рівняння (1) має вигляд довго періодичного коливання Гудвіна, якщо ж $A < A_{cr}$, розв'язок має вигляд пилчастих коливань з періодом $T = 1$. Ці висновки справедливі і для інших значень θ: при $A > A_{cr}(\theta)$ збуджуються коливання

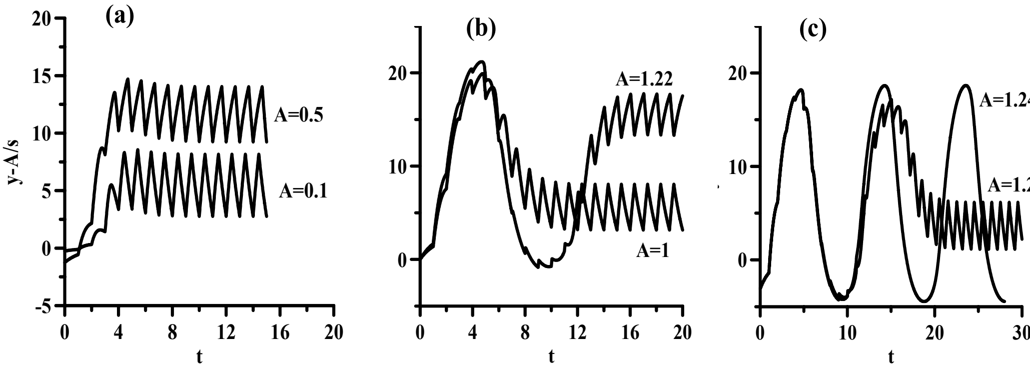

Рис.1. Розв'язки рівняння (3) при різних значеннях незалежних інвестицій A.

Гудвіна, а при $A < A_{cr}(\theta)$ – пилчасті коливання з періодом θ. Залежність $A_{cr}(\theta)$ показана на рис.2. Отже, граничний цикл Гудвіна для рівняння (1) існує лише в обмеженому діапазоні значень часу затримки θ: $\theta \le \theta_{max}$.

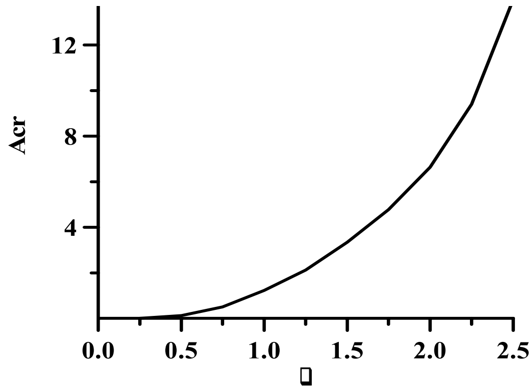

Рис. 2. Залежність $A_{cr}(\theta)$.

Ми провели також серія розрахунків з різними параметрами α, ε, r і $\varphi_+ : \varphi_-$ і вивчили їх вплив на амплітуду і період коливань Гудвіна, аналогічних до експериментів, описаних у роботі [2]. Ці параметри варіювалися відповідно до таблиці 1. У першому рядку таблиці наведені значення параметрів, які визначив Гудвін, базуючись на експериментальних даних.

Таблиця 1

	α	r	ε	θ	$\varphi_+ : \varphi_-$	y_{min}	y_{max}	амплітуда	період	
1b-5b	0.6	2	0.5	1	9:-3	-6.7 -3.2	20 20	26.7 23.2	10.04 8.12	[2] ця робота
1a	0.4	2	0.5	1	9:-3	-4.64 -2.7	13.91 13.6	18.55 16.3	8.11 6.97	[2] ця робота
1c	0.733	2	0.5	1	9:-3	-9.7 -3.0	29.11 29.6	38.81 32.6	12.97 9.61	[2] ця робота
2a	0.6	1.58	0.5	1	9:-3	-6.5 -2.8	19.52 17.0	26.02 19.8	9.6 8.04	[2] ця робота
2c	0.6	8.42	0.5	1	9:-3	-7.3 -9.0	21.91 27.8	29.21 36.8	13.04 8.43	[2] ця робота
3a	0.6	2	0.349	1	9:-3	-7.1 -5.3	21.29 23.3	28.39 28.5	8.74 7.21	[2] ця робота

3c	0.6	2	0.802	1	9:-3	-5.88 -1	17.64 15.2	23.52 16.2	12.18 9.53	[2] ця робота
4a	0.6	2	0.5	0.5	9:-3	-6.34 -1	19.03 19.2	25.37 20.2	7.93 10.66	[2] ця робота
4c	0.6	2	0.5	1.5	9:-3	-6.96 -3.8	20.87 21.5	27.83 25.3	12.16 7.05	[2] ця робота
5a	0.6	2	0.5	1	6:-3	-6.7 -2.	13.41 10	20.11 12	9.71 7.86	[2] ця робота
5c	0.6	2	0.5	1	15:-3	-6.7 -3.5	33.52 41.5	40.22 45.0	10.66 8.62	[2] ця робота

Наші результати в основному якісно підтверджують висновки, зроблені у роботі [3], відносно впливу параметрів на амплітуду коливань ($y_{\max} - y_{\min}$) . Вона особливо чутлива до змін α, ε та $\varphi_+ : \varphi_-$ (див. Таблицю 1). Однак, деякі наші результати, наприклад, для випадків 4a-4c, 5a-5c суперечать результатам роботи [2]. На нашу думку помилковим є висновок [3] про те, що період граничного циклу зменшується при зростанні θ.

Наші розрахунки [3], показали, що пилчасті коливань з періодами $\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{3}, ...$, описані в [2], можна отримати спеціальному виборі початкової функції. Рис. 3a-3d ілюструють приклади коливань, які мають місце, коли початкова функція вибирається у вигляді

$$\Phi_n(t) = \cos\frac{2\pi nt}{\theta}, \quad \dot{\Phi}_n(t) = -\frac{2\pi n}{\theta}\sin\frac{2\pi nt}{\theta}, \; n = 1, 2, ...$$

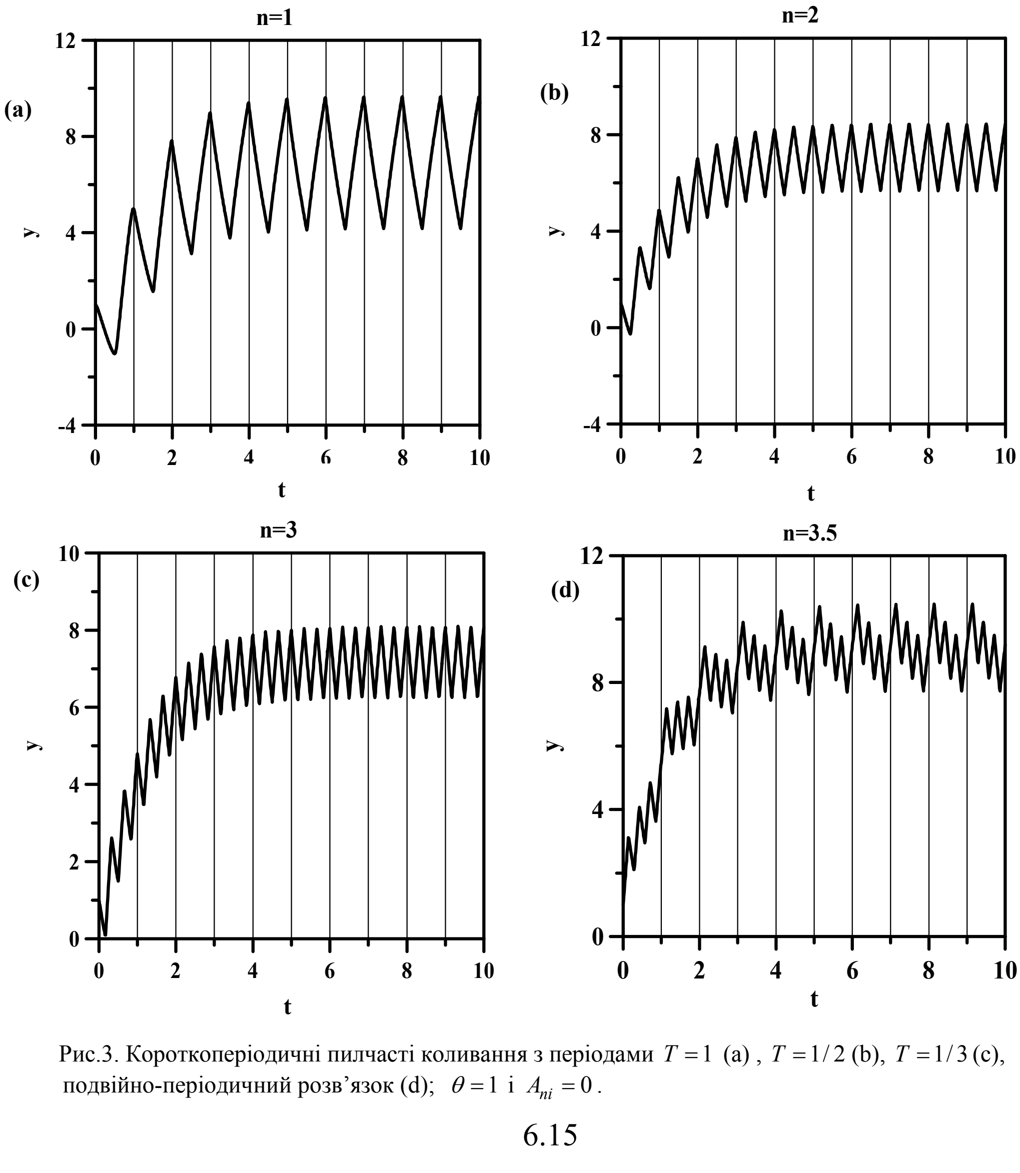

Рис.3. Короткоперіодичні пилчасті коливання з періодами $T = 1$ (a) , $T = 1/2$ (b), $T = 1/3$ (c), подвійно-періодичний розв'язок (d); $\theta = 1$ і $A_{ni} = 0$.

Висновки

Найбільш важливі висновки цієї роботи полягають у наступному. Ми підтвердили чисельно результати аналогового комп'ютерного моделювання [2] і можливість існування короткоперіодичних пилчастих коливань. Ми показали, що збудження коливань Гудвіна має пороговий характер. Досліджено вплив параметрів задачі на амплітуду і період граничного циклу Гудвіна.

Список літератури

1. *Goodwin R. M*. The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles // Econometrica, 1951, v.19. – P.1-17.

2. *Strotz R. H., McAnulty J.C., Naines J.B.* Goodwin's Nonlinear Theory of Business Cycle: an Electro-Analog Solution // Econometrica, 1953, v.21, – P.390-411.

3. *Antonova A.O., Reznik S.N., Todorov M.D.* Analysis of Types of Oscillations in Goodwin's Model of Business Cycle // American Institute of Physics Conference Proceedings, 2011, v.1301. – P.188-195.

4. *Guglielmi N., Hairer E.* Users' Guide for the Code RADAR5 - Version 2.1 //http://www.unige.ch /~hairer/software.html, 2005.