

*Є.О. Шквар, кандидат технічних наук, Т.В. Козлова, кандидат технічних наук,
(Національний авіаційний університет, Україна)*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ТУРБУЛЕНТНИХ ТЕЧІЙ В ЕЛЕМЕНТАХ ПОВЕРХНЕВОГО РЕЛЬЄФУ

Розглядається ефективний та економічний метод моделювання турбулентних примежових шарів над профільованими поверхнями. Сформульована задача спряження розв'язків у пристінній підобласті просторової течії та плоскої течії у зовнішній підобласті, визначені особливості модельних представлень вихідних рівнянь та моделі турбулентності. Приклади демонструють відтворення розрахунками характеристик основної та вторинних течій.

Моделювання ефектів взаємодії течій з обтічними поверхнями є вкрай важливим для визначення опору тертя. Відомо, що негладкі поверхні у деяких випадках при обтіканні демонструють дещо аномальний результат, який полягає в зменшенні тертя до 5-7%. Відомо, що шкіра риб, вкрита лускою регулярної структури, окрім захисних функцій сприяє також і зменшенню тертя. Найбільш показовою у цьому розумінні є шкіра акули, вкрита регулярними геометричними структурами зубоподібної форми, в зв'язку з чим вони і отримали назву зубчиків (denticles). Багаточисельні експериментальні дослідження мікропрофільованих поверхонь наочно переконують у існуванні можливості відтворити цей ефект в технічних об'єктах шляхом штучного профілювання поверхні в напрямку переважаючого розвитку течії [1].

Метою даного дослідження є висвітлення результатів по математичному відтворенню характеристик течії в елементах поперечного рельєфу обтічних поверхонь з метою як з'ясування її структурних особливостей, так і перевірки спроможності моделі до відтворення визначальних рис, притаманних турбулентним течіям біля профільованих поверхонь. Найсуттєвішою проблемою на цьому шляху є той факт, що навіть у випадку плоского примежового шару над профільованою поверхнею, течія поблизу неї набуває просторовості. Висота області просторового розвитку течії, як слідує з експериментальних даних [2], не перевищує 2-2.5 висот оребрення, враховуючи і саму висоту борозенок при значних висотах ($h = 10 - 60$ мм), тоді як при менших висотах $h = 2.2$ мм [3] вона може бути оцінена за наведеними ілюстраціями результатів вимірювань розподілів ізотак поздовжньої компоненти швидкості в поперечному перерізі течії в 1.5-2 висоти оребрення, тобто має тенденцію до зменшення. Реальні висоти рифлення, при яких досягається ефект зменшення тертя $h = 0.5 - 1$ мм ($h^+ = 10 - 25$) [2, 3], висувають при зазначених вище оцінках досить суттєві вимоги до роздільної здатності різницевої сітки поблизу поверхневого рельєфу при необхідності виконання розрахунку для усього примежового шару, який є плоским на переважній частині своєї товщини за винятком зазначеної пристінної області. Крім того, різницева сітка поблизу поверхні мусить бути якомога краще адаптована до поперечного профілю її рельєфу. Зазначені особливості обумовлюють неефективність просторової постановки задачі у криволінійній системі координат для усїєї розрахункової області, яка мусить за розмірами дещо перевищувати товщину примежового шару.

Більш ефективним рішенням є штучний поділ усїєї товщини розрахункової області паралельною до обтічної поверхні площиною на дві підобласті (пристінну та зовнішню) і постановка задачі спряження розв'язків у кожній з них (рис. 1). При цьому характеристики **просторового руху у пристінній підобласті** визначаються розв'язанням рівнянь параболізованої системи рівнянь [4] для кожної зі складових узагальненої змінної $\varphi = \{u, v, w, \Omega_x, k, \varepsilon\}$ і просторової версії моделі турбулентності

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \quad -\overline{u'w'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right),$$

$$-\overline{v'w'} = -\frac{C_3}{C_\mu} \frac{v_t}{k} \left(\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right), \quad \overline{v'} - \overline{w'} = \frac{2C_3}{C_\mu} \frac{v_t}{k} \left(\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right). \quad (1)$$

Тут u, v, w – компоненти швидкості вздовж осей (x, y, z) , $\Omega_x = w'_y - v'_z$ – поздовжня складова завихреності; k – кінетична енергія турбулентності та ε – швидкість її дисипації, $C_3 = 2(4C_2 - 1)/11C_1$, $C_1 = 1.5$, $C_2 = 0.3$. Представлена модифікація розробленої моделі наслідуює з алгебраїчної моделі переносу рейнольдсових напружень структуру взаємозв'язків між компонентами їх тензора $-\overline{v'w'}$ та $\overline{v'} - \overline{w'}$ від $-\overline{u'v'}$ та $-\overline{u'w'}$. Коефіцієнт турбулентної в'язкості ν_t визначається просторовою модифікацією моделі Мовчана В.Т. [5], що пропонується авторами у наступному вигляді:

$$\nu_t = \nu_{t \text{ out}} \tanh(\nu_{t \text{ in}} / \nu_{t \text{ out}}), \quad \nu_{t \text{ in}} = l \nu_{*3D}, \quad l = \kappa l_{3D} \sqrt{\tau} D_m,$$

$$D_m = \tanh \frac{\sinh^2[\chi_1 l_{3D}^+ \sqrt{\tau}] \tanh[\sinh^2(\chi_2 l_{3D}^+ \sqrt{\tau})]}{\kappa l_{3D}^+ \sqrt{\tau}}, \quad l_{3D}^+ = \frac{l_{3D} \nu_{*3D}}{\nu}, \quad \nu_{t \text{ out}} = C_\mu k^2 / \varepsilon, \quad (2)$$

де модельні коефіцієнти визначаються сталими значеннями з наступних інтервалів $\kappa = 0.37 - 0.45$, $\chi_1 = 0.068 - 0.072$, $\chi_2 = 0.223$, $C_\mu = 0.09$. Визначення зазначених в (2) просторових масштабів поблизу різних елементів обтічної поверхні з урахуванням можливої взаємодії суттєво залежить від геометричної конфігурації останньої. Наприклад, у випадку течії вздовж ребра прямокутного двогранного кута запропоновані до використання наступні співвідношення:

$$l_{3D} = (y^{-1} + z^{-1})^{-1} \quad (3)$$

– для лінійного масштабу, де y , z – відповідно відстані до кожної з граней;

$$\nu_{*3D} = \sqrt{\tau_\Sigma / \rho} = \sqrt[4]{(-\overline{u'v'})^2 + (-\overline{u'w'})^2} = \sqrt[4]{\nu_{*y}^4 + \nu_{*z}^4} \quad (4)$$

– для масштабу швидкості, де

$$\nu_{*y} = \sqrt{-\overline{u'v'}}, \quad \nu_{*z} = \sqrt{-\overline{u'w'}}.$$

Натомість, у **зовнішній підобласті** течії моделюється **двовимірний** рух шляхом розв'язування рівнянь плоского примежового шару для узагальненої змінної $\varphi = \{u, v, k, \varepsilon\}$ та двовимірної версії моделі турбулентності [5]. Поточні розв'язки в обох областях зрощуються на розділяючій площині (рис. 1). У пристінній підобласті будується просторова сітка, адаптована до форми профілю рельєфу у площині, перпендикулярній поздовжній маршовій координаті x . За умови використання декартових координат застосовується дискретизація за геометричною прогресією, у випадку доцільності побудови криволінійної сітки – метод Томпсона. У останньому випадку використовуються рівняння, записані в криволінійних

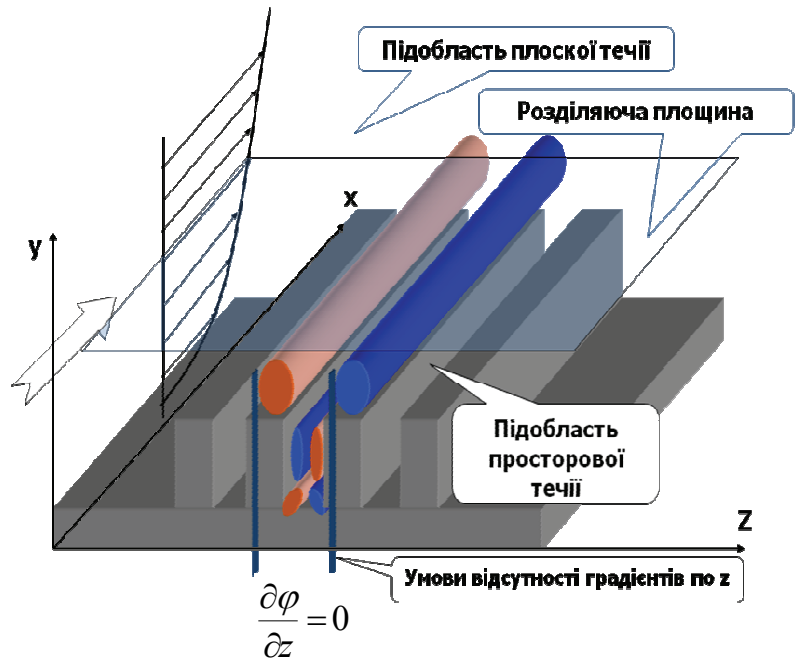


Рис. 1. Схема постановки задачі спряження з метою моделювання течій над профільованою поверхнею

координатах. При використанні схем третього порядку точності QUICK чи ISNAS застосовуються відповідні коригування центрально-різницевої чи гібридної схем.

Постановка задачі спряження передбачає модифікацію межових умов. Для пристінної підобласті межові умови параболізованої постановки задачі модифікуються лише на її зовнішній межі $y_1 = y_{sep}$, тобто на розділяючій площині. На цій самій площині, яка є внутрішньою межею для задачі параболічного наближення, зазнають змін межові умови прилипання, типові для обтічної поверхні. Ці зміни полягають у спряженні розв'язків на спільній межі двох підобластей та умові відсутності рухів у напрямку осі z , а саме:

$$\begin{aligned} \bar{u}|_{y=y_{sep}-0} &= \bar{u}|_{y=y_{sep}+0}; & \bar{v}|_{y=y_{sep}-0} &= \bar{v}|_{y=y_{sep}+0}; & \bar{k}|_{y=y_{sep}-0} &= \bar{k}|_{y=y_{sep}+0}; \\ \bar{\varepsilon}|_{y=y_{sep}-0} &= \bar{\varepsilon}|_{y=y_{sep}+0}; & \bar{w}|_{y=y_{sep}-0} &= \bar{\Omega}_x|_{y=y_{sep}-0} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

У остаточному вигляді задача полягає в побудові на кожному кроці вздовж маршової координати x ітераційного процесу відшукування розв'язку рівнянь пристінної та зовнішньої підобластей разом з відповідними типовими для них межовими умовами зі змінами відповідно до (5). Незважаючи на застосування безітераційних схем для рівнянь плоского примежового шару, результати розрахунків після наперед заданої кількості ітерацій (від 5 до 10) різницевих рівнянь у пристінній підобласті узгоджуються згідно (5). Вихід з ітераційного процесу на кожному поточному кроці $(n+1)$ відбувається при виконанні на ітерації k умови $|\left(\bar{\varphi}^{n+1}\right)_k - \left(\bar{\varphi}^{n+1}\right)_{k-1}| / \left(\bar{\varphi}^{n+1}\right)_{k-1} < 10^{-4}$ в обох підобластях одночасно, після чого здійснюється перехід до наступного кроку вздовж маршового напрямку x .

Сформульована вище задача є комплексною і успіх її розв'язання залежить від правильного відтворення її складовими найсуттєвіших особливостей взаємодії потоку та обтічної поверхні, обумовлених геометрією рельєфу та режимними параметрами формування течії. Однією з найважливіших відмінностей є різниця у визначальних масштабах пристінного руху. Так, у пристінній підобласті характерні масштаби "закону стінки" l_{3D} та U_{*3D} визначаються з урахуванням взаємодії між суміжними поверхнями обтікання, що формують рельєф борозенки через суперпозиції відстаней від кожної з цих поверхонь до розрахункового вузла, а також відповідних локальних динамічних швидкостей. У зовнішній підобласті в ролі цих масштабів фігурують відстань y від розрахункового вузла до площини обтічної поверхні без урахування особливостей її рельєфу, а також осереднена по довжині однієї борозенки s вздовж поперечної координати z динамічна швидкість $U_* = s^{-1} \int_0^s U_{*3D}(z)|_{y=y_{sep}} dz$.

Турбулентна течія в кутовій конфігурації. З метою тестування спроможності розробленої моделі (1-4) разом з відповідним методом розрахунку до відтворення вторинних течій, характерних для обтікання типових кутових конфігурацій двох поверхонь у напрямку ребра їх перетину (рис. 2), проведено тестування розрахунком течії вздовж каналу квадратного поперечного перерізу. Розрахунок розпочинався зі вхідного перерізу, де задавалися рівномірні профілі $U(y, z) = U_\infty$, $k(y, z) = k_o = (0.005 \div 0.01)U_\infty^2$, $\varepsilon_o = (10 \div 100)C_\mu k_o^2$. На стінках $y = 0$ та $z = 0$ задавалися умови прилипання $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$, $\bar{w} = 0$ та $k = k_{**}$, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{**}$ згідно $k_{**} = U_*^2 / \sqrt{C_\mu}$, $\bar{\varepsilon}_{**} = U_*^3 / (\kappa y_{**})$, $\nu_{t**} = C_\mu k_{**}^2 / \bar{\varepsilon}_{**} = U_* \kappa y_{**}$, $y_{**} = (10 - 70)\nu / U_*$. У площинах симетрії каналу $y = 1$

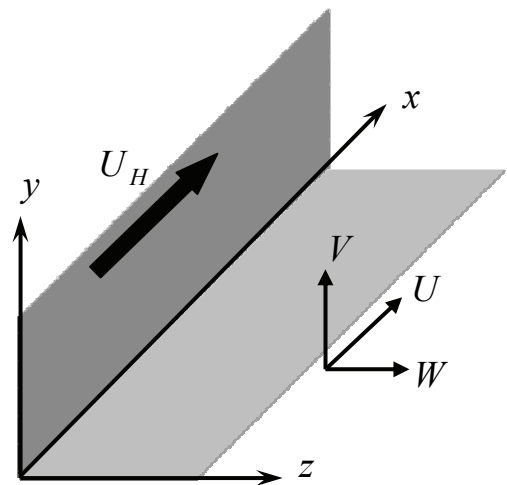


Рис. 2. Декартова система координат (x, y, z) та відповідні компоненти швидкості (U, V, W) для моделювання течій з переважаючим напрямком розвитку

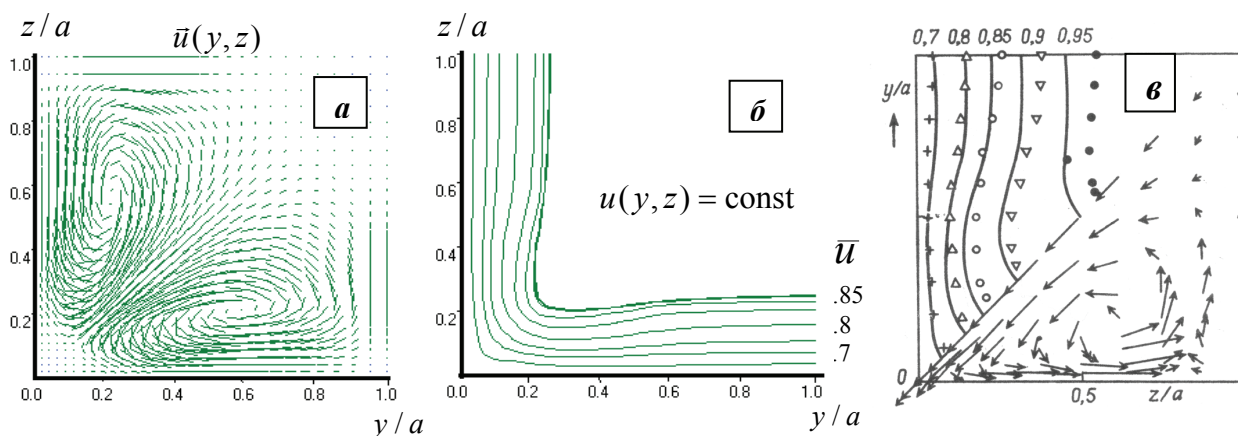


Рис. 3. Розрахунок течії в каналі квадратного перерізу. Завдяки симетрії зображено лише лівий нижній квадрант. **а** – результати відтворення системи вторинних вихорів течії; **б** – розрахунок ізотех поздовжньої швидкості; **в** – результати розрахунків [4] (лінії) у порівнянні з експериментальними результатами [11] (точки, вектори)

та $z = 1$ задано $u'_y = w'_y = k'_y = \varepsilon'_y = 0$, $v = 0$ та $u'_z = v'_z = k'_z = \varepsilon'_z = 0$, $w = 0$ відповідно. Розрахунок відтворював умови проведення експерименту Gessner F.B., Po J.K., Emeri A.F. [6], $U_\infty \approx 15$ м/с, повітря, півширина каналу $a = 0.127$ м. Результати відповідних розрахунків на основній ділянці формування течії $x/(2a) = 84$ у порівнянні як з результатами зазначених експериментів, так і з результатами розрахунків [4] свідчать про відповідність розрахованої системи симетричних вторинних течій із закруткою до ребра кута вздовж його бісектриси (рис. 3-а) та обумовленого цим вихровим рухом характерного вигину ізотех $\bar{u}(y, z)$ (рис. 3-б) експериментальним даним [6] та розрахункам [4] (рис. 3-в). Отриманий результат впевнює в коректності розробленого методу по відношенню до розглянутої класичної тестової задачі.

Висновки

Підсумовуючи проведений аналіз та отримані результати, можна зробити висновок, що розроблена гібридна математична модель та відповідний розрахунковий метод відтворюють ефекти взаємного впливу граней борозенок поздовжнього профілювання обтічної поверхні на формування турбулентної зсувної течії і, зокрема, вторинних течій в заглибленнях профілю рельєфу несуперечливо до відомих експериментальних даних та з належною мірою деталізації відтворення визначальних характеристик течії.

Список літератури

1. Уменьшение турбулентного трения с помощью риблетов (по материалам открытой иностранной печати) // Обзор ЦАГИ № 259. – М.: ЦАГИ, 1991. – 38 с.
2. Okamoto S. Effect of Riblet Shape on Turbulent Drag Reduction / S. Okamoto, T. Uchida, T. Yoneyama, K. TakiGuchi, S. Kimura // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. – 2000–02. – В 66(642). – Р. 60–68.
3. Suzuki Y. Turbulent Drag Reduction Mechanism above a Riblet Surface / Y. Suzuki, N. Kasagi // AIAA Journal. – September, 1994. – Vol. 32, № 9. – Р. 1781–1790.
4. Арналь А. Численное исследование течений вдоль двугранного угла / А. Арналь, Ж. Кустей // Трехмерные турбулентные пограничные слои; под ред. Х. Фернхольца, Е. Краузе. – М.: Мир. – 1985. – С. 331–343.
4. Мовчан В.Т. Різномірні математичні моделі коефіцієнта турбулентної в'язкості / В.Т. Мовчан, Є.О. Шквар // Прикладная гидромеханика. – 2010. – Т.12, № 1. – С. 55–67.
5. Gessner F.B. Measurement of developing turbulent flow in a square duct / F.B. Gessner, J.K. Po, A.F. Emeri // Proc. of the Symp. On Turbulent Shear Flows, Univ. Park, Pennsylvania, April 18-20, 1977