УДК 532.5

Павел В. Лукьянов, к.ф.-м.н.
(Институт гидромеханики НАН Украины, Украина)

ИНЕРЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНОГО КОЛОННООБРАЗНОГО ВИХРЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

На примере колоннообразного вертолётного вихря показано, что инерционная устойчивость может описываться аналогией Релея между устойчивостью стратифицированной жидкости и одномерным вращением жидкости. Для вязкой жидкости циркуляция не сохраняется вдоль линий тока, а циклострофический баланс остается. Поэтому, согласно Рэлею, за устойчивость отвечает ускорение.

Рассмотрим движение в виде колоннообразного вихря: $V_r = 0,\ \ V_z = 0,\ V_\theta = V_\theta(r,t).$ При отсутствии радиальной и вертикальной компонент скорости движение описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} -\dfrac{V_\theta^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r}, & (1) \\ \dfrac{\partial V_\theta}{\partial t} = \nu\left(\dfrac{\partial V_\theta}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} - \dfrac{V_\theta}{r^2}\right). & (2) \end{cases}$$

Первое уравнение системы – циклострофический баланс, второе – уравнение диффузии азимутальной компоненты скорости. Для одномерного движения это уравнение является линейным. Примером такого движения есть колоннообразный вертолётный вихрь, кинематика которого хорошо аппроксимируется вихрем Лэмба-Озеена:

$$\begin{cases} V_\theta = \dfrac{1}{r\left(1+4t/\mathrm{Re}\right)^{1/2}}\left[1-\exp\left(-r^2\left(1+4t/\mathrm{Re}\right)\right)\right], & (3) \\ \omega_z = \dfrac{2}{1+4t/\mathrm{Re}}\exp\left(-r^2/\left(1+4t/\mathrm{Re}\right)\right). & (4) \end{cases}$$

Как указано в работе [1], такой вихрь является устойчивой структурой. И тем не менее на фоне указанного движения (3)-(4), происходит генерация вторичного движения – вихревых колец. В цитированной работе [1] предпринята попытка объяснить это очевидное противоречие при помощи некого оптимального механизма. *Цель данной работы* – выяснить причину неустойчивости, начинающейся на периферии ядра.

Когда в упомянутой работе говорится об устойчивости, то имеется в виду инерционная устойчивость и критерий Рэлея инерционной устойчивости [2] – так называемая *циркуляционная теорема* (не путать с теоремами Кельвина-Гельмгольдца о циркуляции). Согласно этой теореме, если квадрат циркуляции $\left(V_\theta r\right)^2$ возрастает с удалением от оси вращения, то такое движение – инерционно устойчивое. И наоборот. Нейтральной кривой устойчивости, по этому критерию, есть потенциальное перемещение жидкой частицы по концентрическим окружностям: $V_\theta = C/r$.

Уместно вспомнить, что реальные жидкости и газы – вязкие среды. Поэтому не случайно критерий инерционной устойчивости, доказанный для невязких, в общем случае нестационарных, движений, не может объяснить возникающие внутри колоннообразного вертолётного вихря турбулентные вихревые кольца (вихри Тейлора). Действительно, согласно этой теореме весь вихрь Лэмба-Озеена должен быть устойчивым. Квадрат циркуляции равен:

$$\left(V_\theta \cdot r \cdot 2\pi\right)^2 = \left(\Gamma\right)^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right)\right]^2 \quad (5)$$

В выражении (5) $\lambda = \left(1 + 4t/\mathrm{Re}\right)^{1/2}$. В соответствии с критерием Рэлея:

$$\frac{d}{dr}\left(\left(V_\theta \cdot r \cdot 2\pi\right)^2\right) = \left(\Gamma\right)^2 \cdot 2\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right)\right]\frac{2r}{\lambda^2}\exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right) > 0$$

для всех $r > 0$.

Это означает, что вихрь инерционно устойчив везде. Используя аналогию Рэлея, которая, как указано выше, справедлива и для вязких течений, приходим к следующему неравенству:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\left[1 - \exp\left(-\left(r/\lambda\right)^2\right)\right]^2}{r^3}\right) = \frac{\left[1 - \exp\left(-\left(r/\lambda\right)^2\right)\right]\left(4\left(r/\lambda\right)^2 - 3\left[1 - \exp\left(-\left(r/\lambda\right)^2\right)\right]\right)}{r^4} > 0,$$

которое эквивалентно $4\left(r/\lambda\right)^2 - 3\left[1 - \exp\left(-\left(r/\lambda\right)^2\right)\right] > 0$.

Последнее неравенство означает, что вихрь Лэмба-Озеена имеет внутреннюю устойчивую область и внешнюю неустойчивую. Это указывает на возможность генерации областей неустойчивости внутри вихря, что может привести даже к турбулентности. В области перед максимумом V_θ, то есть на периферии ядра вихря, центробежное ускорение становится убывающим (для r больше чем приблизительно 0.8 от ядра вихря, см. рис.1). Это объясняет генерацию вихрей Тейлора подобно тем, что имеют место между двумя вращающимися цилиндрами в случаях потери устойчивости.

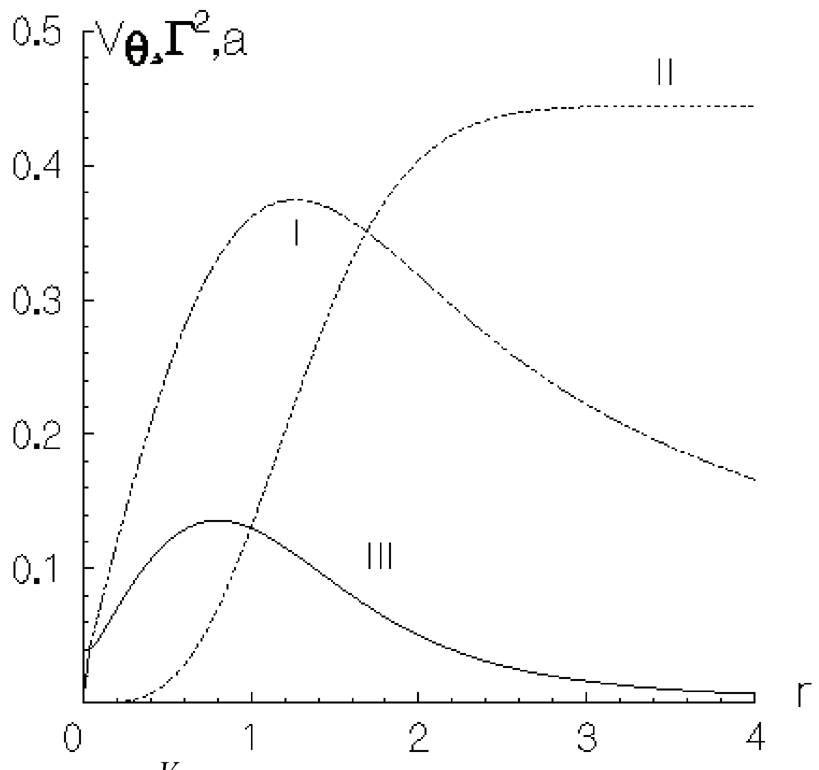

Fig.2 Азимутальная скорость V_θ (кривая I), квадрат циркуляции (делённый на 2π) $\Gamma^2 = \left(V_\theta \cdot r\right)^2$ (кривая II) и центробежное ускорение $a = \frac{V_\theta^2}{r}$ (кривая III).

Следовательно, отход от ограничения идеальности жидкости (и газа) и учёт вязкости, сохранил *аналогию* (Рэлея). А циркуляция вдоль линий тока при этом не сохраняется. Но именно *аналогия* является центральной идеей Рэлея [2]. Ведь указанная аналогия вовсе не зависит от того, сохраняется циркуляция вдоль линий тока или нет. Поэтому отменять эту аналогию, чего до сих пор никто не сделал, -- вовсе нет надобности. Наоборот: как раз аналогия между гидростатическим и циклострофическим балансом является критерием устойчивости одномерного вязкого (а значит реального) вращения. Известно, что если плотность жидкости уменьшается с глубиной, то ее равновесие – неустойчивое. Согласно аналогии Рэлея, если в циклострофическом балансе радиальное (центробежное) ускорение – убывает с удалением от оси вращения, то такое состояние – также неустойчиво. И наоборот. Именно такой подход достаточно точно определяет начало зоны неустойчивости в колоннообразном вертолетном вихре (рис. 1).

Литература

[1] *Arnaud Antkowiak and Pierre Brancher.* On the vortex rings around vortices: optimal mechanism. J.Fluid Mech. 2007. v. 578, pp. 295-304.

[2] *Lord Rayleigh O.M., F.R.S.* On the Dynamics of Revolvinf Fluids. //Proc.Roy. Soc. London. 1917. v. 93 № A648, pp.148-154.